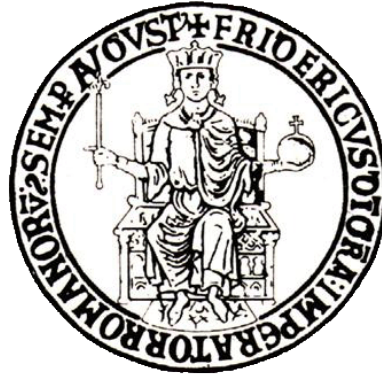


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI

“FEDERICO II”



Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

**ANALISI ELASTICA DEL II ORDINE:
L'EFFETTO P – δ**

Relatore:

Chiar.mo Prof. Mario Pasquino

Tesi di Laurea di

Federico Foria

Matricola N49/229

ANNO ACCADEMICO 2011 / 2012

1. Analisi del I ordine di sistemi intelaiati	3
2. Gli effetti del II ordine	5
3. Valutazione del carico critico	9
4. Conclusioni	11

1. Analisi del I ordine di sistemi intelaiati

L'analisi strutturale ha come obiettivo la determinazione delle sollecitazioni associate alle combinazioni di carico più significative. L'approssimazione e la complessità di tale analisi dipende dalla tipologia e dall'importanza della struttura in esame. Oggigiorno sono presenti in commercio molti software di calcolo automatico che permettono di eseguire un'analisi:

- elastica del I ordine: con l'assunzione delle ipotesi dei piccoli spostamenti e deformazioni infinitesime;
- degli effetti del II ordine: considerando la non linearità meccanica del materiale cui la struttura è costituita e la non linearità geometrica.

Per capire la differenza tra le due tipologie di analisi si prenda in esame una struttura molto diffusa nella pratica progettuale: il telaio piano. Generalmente i telai piani vengono suddivisi in telai a *nodi fissi* e a *nodi spostabili* (V. Franciosi, 1965).

Nei telai a nodi fissi si considerano le aste indeformabili assialmente, ciò riduce i possibili cinematismi alle sole rotazioni nei nodi. Nella pratica progettuale, però, sono più diffusi i casi in cui si tiene conto della deformabilità a taglio delle aste, ossia il telaio a nodi spostabili. In questo caso i gradi di libertà (g.d.l.) del sistema sono:

- le rotazioni nei nodi;
- gli spostamenti traslazionali dei piani $\delta_r = \psi_r \cdot h_r$

Il telaio, comunque caricato verticalmente e orizzontalmente nei nodi, viene risolto con il metodo delle deformazioni, più agevole per il calcolo automatico per la rapidità delle operazioni da compiere.

Infatti per ogni nodo si può scrivere la seguente equazione di equilibrio:

$$\sum_k M_{(i,k)} = 0$$

facendo variare il pedice (k) tra i secondi estremi di tutte le aste confluenti nel nodo (i).

Per ogni traverso, invece, si può scrivere la seguente equazione di equilibrio:

$$Q_r + \sum_r T_{(i,k)} = 0$$

indicando con (Q_r) il tagliante al piano r_{esimo} (sommatoria di tutte le forze orizzontali nodali contenute all'interno del sezionamento) e con $\sum_r T_{(i,k)}$ i tagli dei ritti (i, k) in corrispondenza del medesimo piano.

Il numero di equazioni linearmente indipendenti è pareggiato dal numero di incognite:

- i equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi per i rotazioni incognite degli stessi:
- r equazioni di equilibrio alla traslazione di piano per r rotazioni di piano.

Scrivendo in ordine tutte le equazioni di equilibrio, si ottiene un sistema di equazioni la cui matrice dei coefficienti è la matrice di rigidezza della struttura.

2. Gli effetti del II ordine

Per comportamento non lineare di una struttura si intende un comportamento nel quale le risposte non sono direttamente proporzionali alle azioni. La non linearità è principalmente di duplice natura:

- meccanica: quella legata a considerare il materiale di tipo lineare e quindi dipende dalla non linearità del legame costitutivo ($\sigma - \varepsilon$) del materiale cui la struttura è costituita;
- geometrica: quando la struttura, soggetta al carico, si deforma a tal punto che la configurazione deformata non può più essere approssimata con quella indeformata ovvero, nei casi di grandi spostamenti o buckling, l'equilibrio della struttura si raggiunge in una configurazione che non è più quella originaria ma è deformata e su tale configurazione si dovrebbero riferire le condizioni di equilibrio.

L'analisi di strutture frequenti nella pratica progettuale, come i telai elastici, in regime di non linearità, è importante per conoscere con maggior precisione l'effettivo grado di sicurezza della struttura reale rispetto ad un certo fenomeno.

Si parte dal caso più semplice di una mensola in presenza di un carico verticale (P) e di uno orizzontale (F) (figura 2.1):

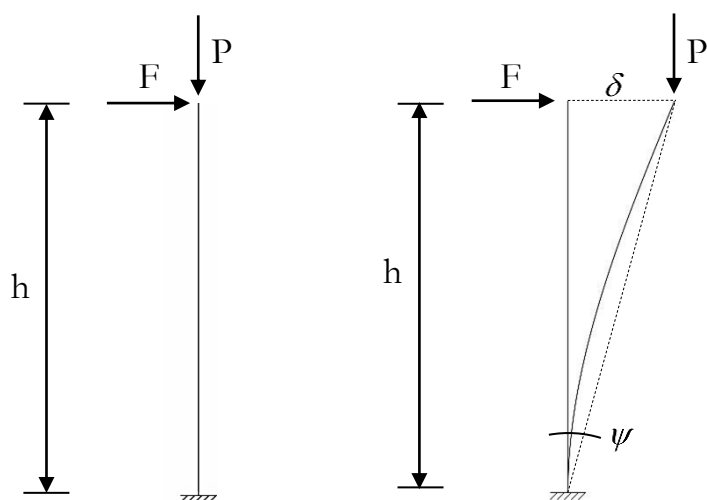


Figura 2.1: struttura a mensola e relativa deformata.

La deformazione della mensola si compone di una deformazione assiale e di una deformazione flessionale che è prevalente rispetto alla prima. Lo spostamento trasversale dell'estremo libero calcolato rispetto alla configurazione indeformata vale:

$$\delta = \frac{F \cdot h^3}{3 \cdot EI}$$

Secondo un'analisi in campo lineare lo spostamento in sommità, provocato da forze proporzionali a F e a P, sarebbe ugualmente proporzionale a δ , ma c'è l'errore che si commette nell'aver trascurato il momento flettente del carico (P) rispetto alla configurazione deformata (figura 2.2).

L'effetto di (P) rispetto alla configurazione deformata è detto: effetto instabilizzante dei carichi verticali o effetto $P - \delta$ o anche effetto del II ordine.

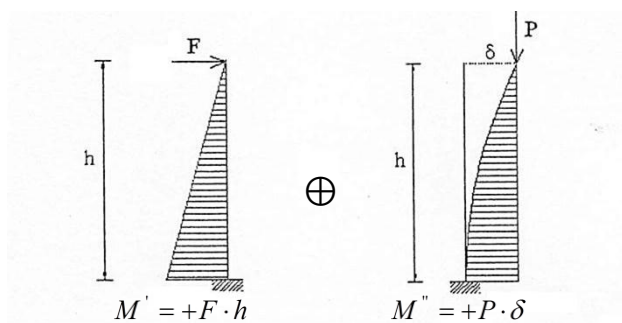


Figura 2.2: effetto $P - \delta$.

L'effetto $P-\delta$ si può tenere in conto scomponendo il carico (P) in due componenti, una diretta secondo la deformata rigida e l'altra orizzontale $H = P \cdot \psi$, e considerando l'azione orizzontale (H) sulla struttura insieme al carico orizzontale (F).

Le considerazioni fatte per la mensola possono essere estese ad un telaio di r piani a nodi spostabili, soggetto a carichi orizzontali nodali e ad una distribuzione qualsiasi di carichi verticali, sostituita da un sistema equivalente di carichi verticali nodali (figura 2.5).

Si consideri la deformata provocata da una rotazione unitaria dell'ultimo piano di un telaio piano (ψ_1), così da poter scrivere le equazioni di equilibrio in configurazione deformata (figura 2.3).

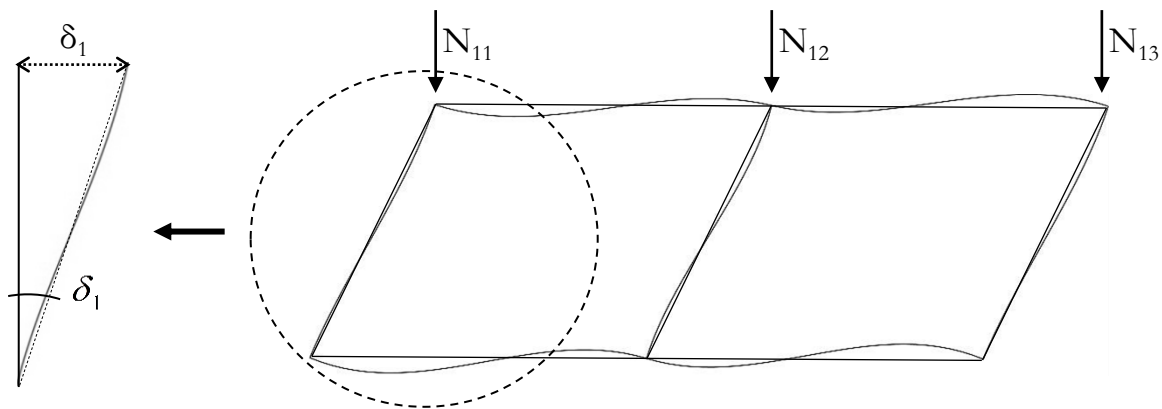


Figura 2.3: deformata rettilinizzata del piano 1 del telaio.

I carichi nodali N_{11}, N_{12}, N_{13} vengono applicati nella configurazione deformata. Si prenda a titolo di esempio il ritto 1, il carico N_{11} si può scomporre in una componente S_{11} parallela alla configurazione deformata rettilinizzata e in una componente orizzontale H_{11} (figura 2.4):

$$S_{11} = N_{11} \quad H_{11} = N_{11} \cdot \psi_1$$

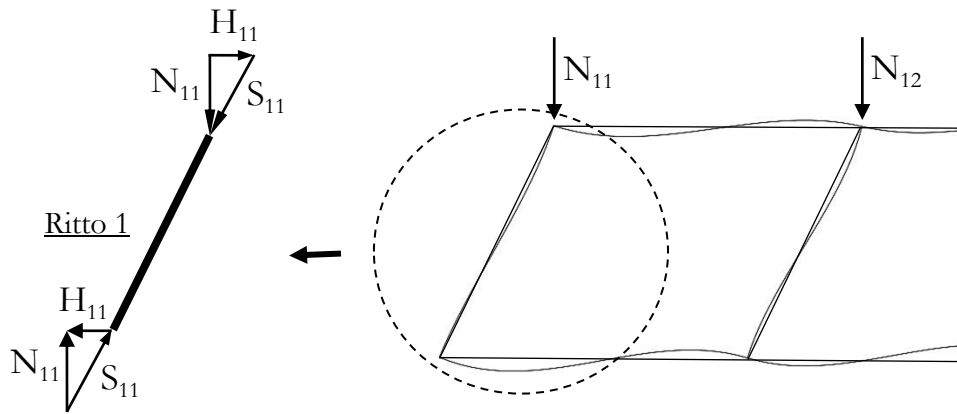


Figura 2.4: scomposizione del carico N_{11} .

La componente H_{11} genera un momento flettente aggiuntivo non considerato nelle equazioni di equilibrio in configurazione indeformata. Quest'ultima, insieme alla componente uguale e contraria che nasce alla base del ritto per equilibrio, genererà una coppia di piano (figura 2.5).

Estendendo il discorso a tutti i ritti del piano r_{esimo} , per tenere conto dell'effetto instabilizzante dei carichi verticali, bisogna aggiungere una coppia di piano fittizia:

$$H_r = N_r \cdot \psi_r$$

dove N_r è la somma dei carichi agenti sopra il piano r_{esimo} (piano r compreso).

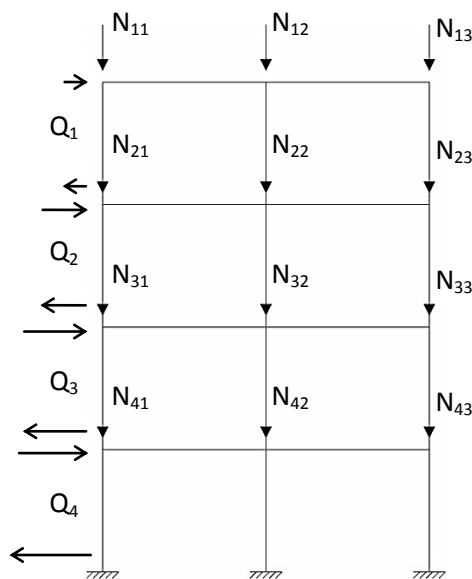


Figura 2.5: schematizzazione delle forze esterne.

3. Valutazione del carico critico

Considerato un telaio soggetto a carichi verticali ed orizzontali, se si riporta in un diagramma il valore di un parametro di deformazione in funzione del moltiplicatore dei carichi verticali (α) (figura 3.1), si ottiene un andamento rettilineo fino al raggiungimento del valore α^* (moltiplicatore critico). In corrispondenza di tale valore, il telaio abbandona la configurazione di equilibrio stabile, rappresentata da punto ben preciso nel piano $\alpha-\delta$, per assumere una delle infinite configurazioni equilibrate e congruenti che sono caratterizzate dall'aver la stessa forma.

Se tenessimo conto dell'effetto $P-\delta$ e quindi di un calcolo in regime non lineare, la retta diventa una curva che tende asintoticamente alla retta $\alpha = \alpha^*$ (figura 3.1).

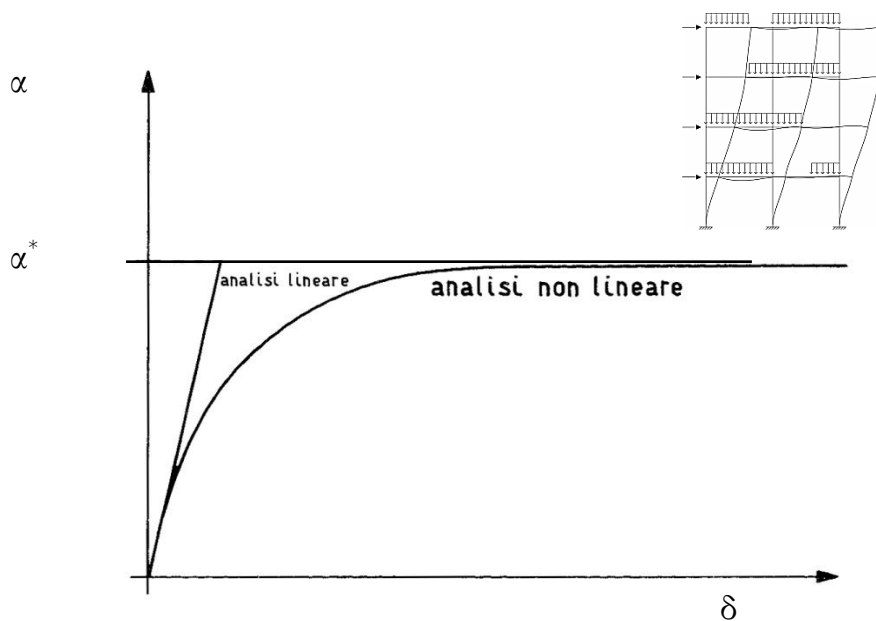


Figura 3.1: carico critico per un telaio.

Quando il telaio è in condizione critica si verifica l'equilibrio tra due enti fisici: l'energia elastica immagazzinata nel telaio che ha un effetto stabilizzante, e gli effetti

instabilizzanti dei carichi verticali dovuti alla loro applicazione nella configurazione deformata.

Al generico piano (r), l'equilibrio sopra descritto è espresso dalla seguente relazione:

$$\alpha_r \cdot N_r \cdot \psi_r = Q_r$$

dove $(\alpha_r \cdot N_r \cdot \psi_r)$ rappresenta gli effetti instabilizzanti dei carichi verticali e Q_r rappresenta l'energia elastica, funzione della deformata del telaio e quindi delle rotazioni di piano $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$.

Le incognite del problema sono il moltiplicatore critico dei carichi verticali α^* e le incognite cinematiche ψ_r . La soluzione avviene attraverso procedimenti iterativi.

Un esempio di metodo iterativo consiste nel determinare il moltiplicatore critico dei carichi in maniera incrementale cioè risolvendo lo schema geometrico soggetto ad una sequenza di carichi via via crescenti, finché il procedimento risolutivo non converge.

Quando il metodo di risoluzione non converge, vuol dire che si è prossimi al limite di passaggio tra il campo di equilibrio stabile e il campo di equilibrio instabile, pertanto il valore del moltiplicatore dei carichi è proprio il moltiplicatore critico α^* .

Si consideri che il valore di α^* determinato con la procedura sovraesposta è sovrastimato rispetto al valore reale perché è sottostimata la deformata laterale (ψ_r), in quanto la struttura viene considerata più rigida della realtà.

4. Conclusioni

Oggigiorno è fondamentale avere coscienza degli effetti instabilizzanti del II ordine. Infatti l'effetto $P-\delta$ è contemplato all'interno della stessa normativa tecnica ed è per questo fondamentale, qualora ci si trovi in un caso che lo richieda, conoscere la metodologia d'analisi da applicare per modellare il fenomeno.

Il lavoro di tesi, se pur rivolto all'approfondimento di aspetti teorici, spazia all'interno di una parte fondamentale del percorso di studi della laurea triennale di Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, che va dal corso di Meccanica Razionale fino a quello di Tecnica delle Costruzioni, passando per i concetti basilari e indispensabili di Scienza delle Costruzioni.