



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

Facoltà di Ingegneria

Corso di Studi in Ingegneria per l'Ambiente e per il Territorio

Tesi di laurea

*Il problema dell'instabilità torsio-flessionale
delle travi inflesse*

Anno Accademico 2011/2012

RELATORE

Ch.mo Mario Pasquino

CANDIDATA

Iasimone Floriana

matr. N49/132

Indice

1. L'instabilità dell'equilibrio elastico.....	3
2. L'instabilità torsio-flessionale delle travi inflesse.....	4
2.1. Equazioni generali del problema.....	4
2.2. La trave soggetta a momento flettente costante.....	12
2.3. La trave a mensola soggetta ad una forza all'estremo.....	13

1. L'instabilità dell'equilibrio elastico

La condizione di equilibrio instabile è quella che si determina al raggiungimento di un "carico critico" di tipo assiale, superato il quale il problema ammette più soluzioni, ovvero più configurazioni di equilibrio stabile o instabile. Mediante un approccio di analisi lineare non riusciamo a tener conto di tale fenomeno che comporta un cambiamento improvviso e radicale del comportamento della struttura con spostamenti che rendono la stessa non più utilizzabile.

Il problema dell'instabilità è pertanto di tipo non lineare, cioè la struttura si comporta in modo che le risposte non sono direttamente proporzionali alle azioni. Possiamo parlare di non linearità su due differenti livelli:

- non linearità di natura meccanica
- non linearità di natura geometrica.

Rappresentiamo il comportamento di una mensola caricata assialmente e trasversalmente su un diagramma in cui riportiamo in ordinata il moltiplicatore dei carichi verticali α e in ascissa un parametro rappresentativo del suo stato deformativo, ad esempio lo spostamento orizzontale dell'estremo libero della mensola δ .

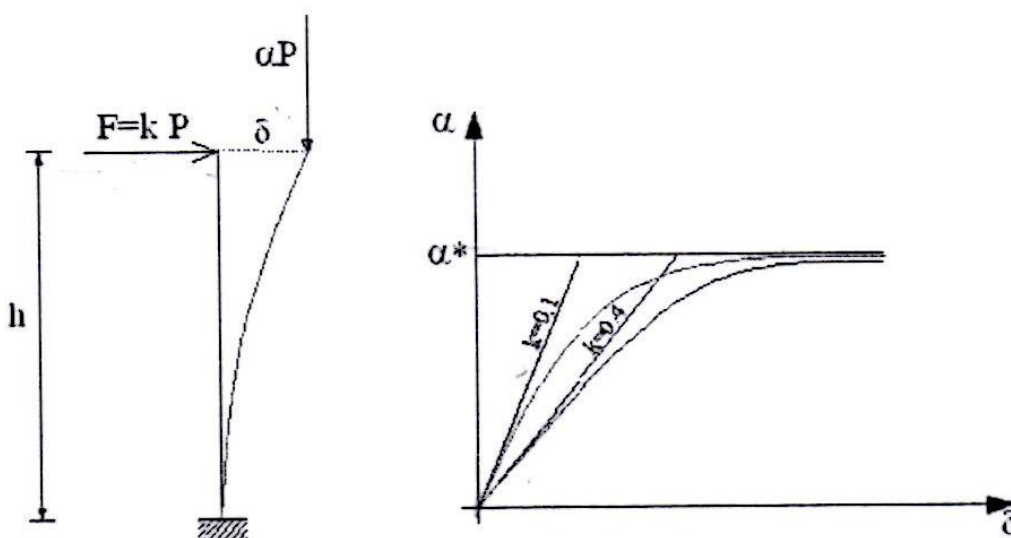
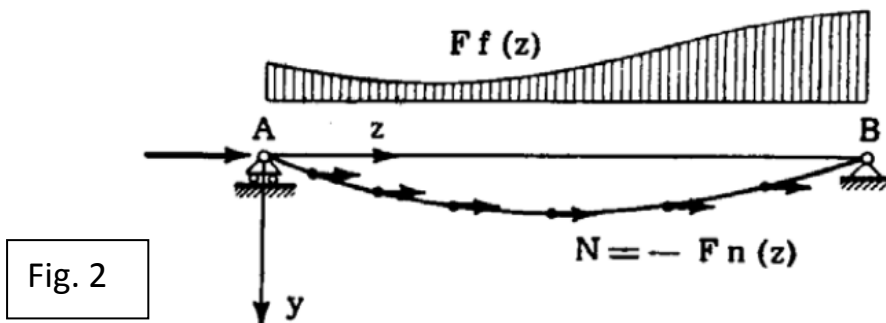


Fig. 1

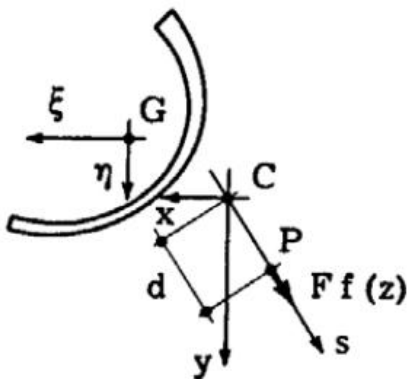
2. L'instabilità torsio-flessionale delle travi inflesse

2.1 Equazioni generali del problema

Consideriamo una trave AB con sezione retta sottile comunque variabile, in cui i baricentri G ed i centri di taglio C siano situati lungo due rette parallele. La trave sia caricata con forze $F f(z)$ agenti secondo un asse s normale all'asse z dei centri di taglio e passanti per esso, e da forze parallele all'asse z agenti lungo la retta dei baricentri e tali che nella sezione all'ascissa z generica sia $-F n(z)$ lo sforzo normale.



Sezione retta



Sia d la distanza dal centro C del punto P di applicazione delle forze $F f(z)$; l'asse s e la distanza d siano invariabili con z .

Gli assi principali ξ ed η siano sulla trave indeformata di direzione invariabile con z ; gli assi $x y$, invariabili con la deformazione e paralleli agli assi ξ ed η della trave indeformata, abbiano per origine il centro C.

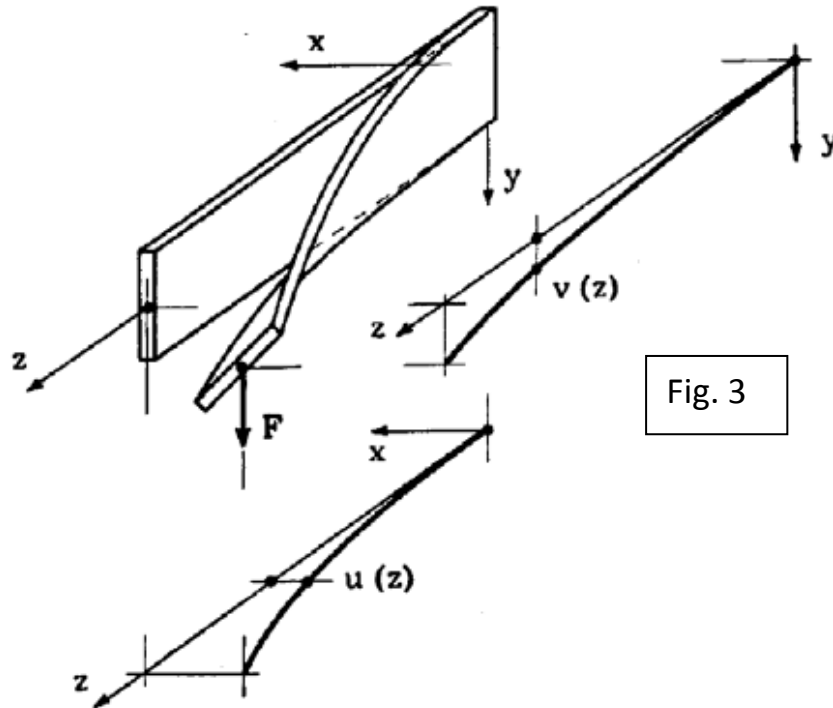
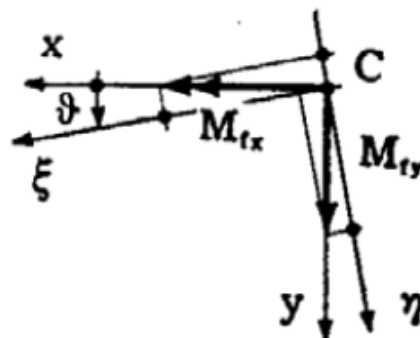


Fig. 3

Equazioni degli spostamenti u e v

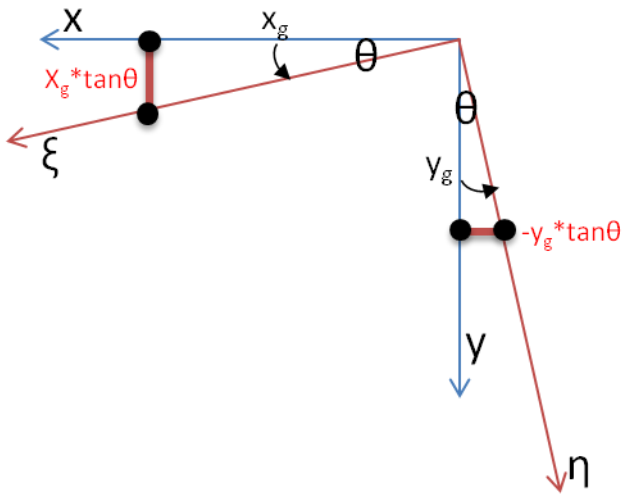
Scriviamo le equazioni dell'equilibrio variato per un generico concio nel caso di flessione retta rispettivamente secondo x ed y . Se la trave (e con essa ξ e η) presenta le rotazioni ϑ intorno all'asse z , le flessioni provocate da M_x e M_y sono deviate; se però le ϑ sono piccole, gli spostamenti u e v secondo x e y possono confondersi con quelli secondo gli assi ξ e η . In tal caso le equazioni scritte saranno valide se sostituiamo ai momenti M_x e M_y quelli relativi agli assi baricentrici ad essi paralleli nella configurazione indeformata.



$$M_{f\xi} = M_{fx} \cos \vartheta + M_{fy} \sin \vartheta$$

$$M_{f\eta} = M_{fy} \cos \vartheta - M_{fx} \sin \vartheta$$

Dobbiamo inoltre tener conto che il centro di taglio non coincide con il baricentro, dove agiscono le forze assiali, quindi aggiungeremo i termini



Infine semplificando le espressioni per rotazioni θ piccole, otteniamo le equazioni differenziali di terzo ordine che descrivono in modo generico gli spostamenti:

$$(EI_{\eta}u'')' + Fnu' - Fny_G\theta' - (M_{fy} - M_{fx}\theta)' = 0 \quad (1)$$

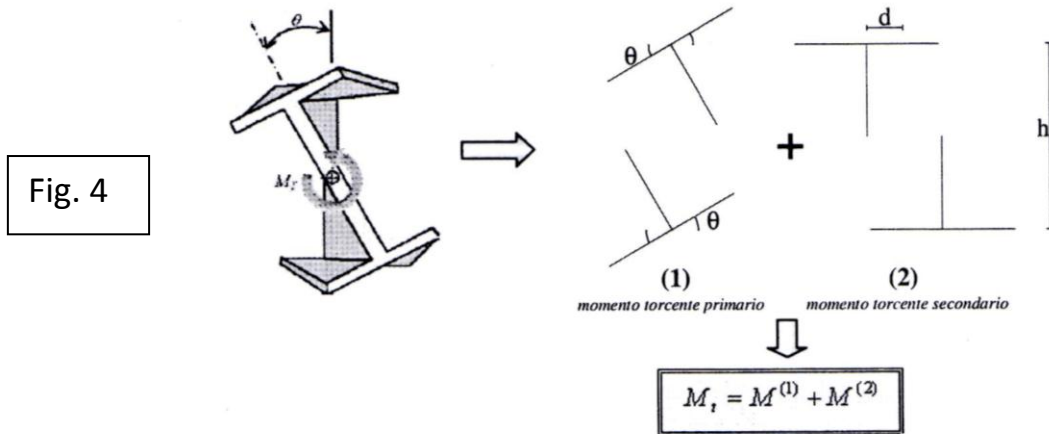
$$(EI_{\xi}v'')' + Fnv' + Fnx_G\theta' + (M_{fx} + M_{fy}\theta)' = 0 \quad (2)$$

Equazione delle rotazioni θ

Le rotazioni θ sono rette dall'equazione più generale della torsione non uniforme valida nel caso in cui i centri di taglio non sono allineati:

$$C_2\theta^{IV} + C'_2\theta''' - C_1\theta'' - C_1\theta' = -\frac{dM_t}{dz} \quad (3)$$

La torsione non uniforme nelle strutture a parete sottile
M. Pasquino, M. Modano, D. Cancellara



La variazione della funzione ingobbamento ψ rispetto all'ascissa z della trave, oltre a rappresentare spostamenti assiali w differenti per le varie sezioni trasversali, rappresenta anche la seguente componente di deformazione:

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

→ Quando tutte le sezioni sono sottoposte alla medesima caratteristica torcente interna (momento torcente costante lungo z) e sono libere di ingobbirsi, esse si deformeranno tutte allo stesso modo, quindi

$$w = \text{cost} \quad ; \quad dw/dz = 0 \quad ; \quad \varepsilon_z^{(2)} = 0 \quad ; \quad \sigma_z^{(2)} = 0$$

→ Quando la caratteristica torcente interna risulta variabile lungo l'asse z (torsione non uniforme), gli ingobbamenti variano da sezione a sezione, cioè:

$$dw/dz \neq 0 \quad ; \quad \varepsilon_z^{(2)} \neq 0 \quad ; \quad \sigma_z^{(2)} \neq 0$$

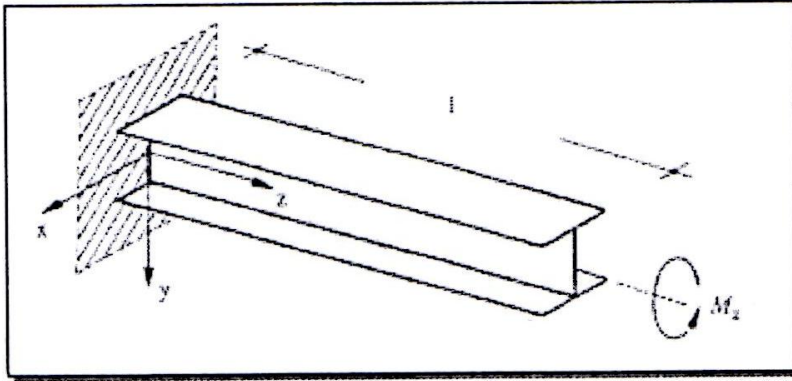
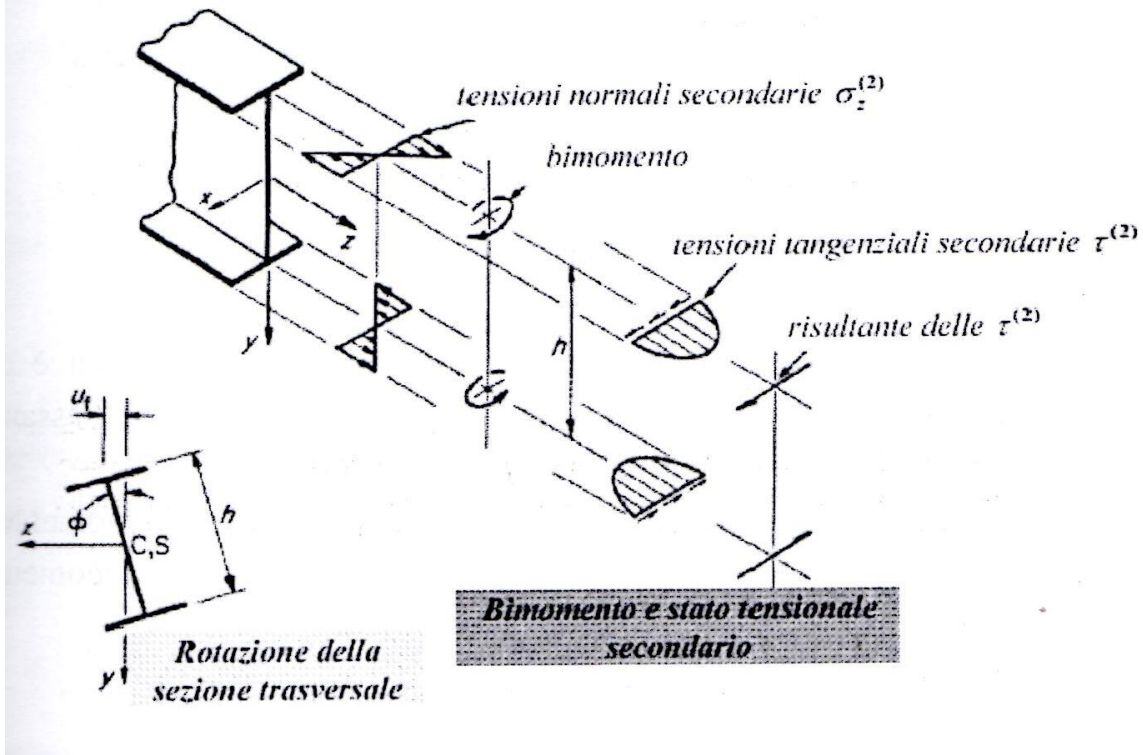


Fig. 5



In tali circostanze l'angolo unitario di torsione

$$\vartheta' = M^{(1)} / C_1$$

$$\text{(per sezione monoconnessa } C_1 = \frac{G}{3} \int_s \delta^3(s) ds)$$

non è più costante da sezione a sezione, ma variabile con z.

Risulterà pertanto $\vartheta' \neq 0$; per valutare tale parametro ci riferiamo ad una espressione analoga a quella utilizzata per ϑ' :

$$\theta'' = \frac{B}{C_2}$$

Dove B rappresenta il bimomento e C_2 la rigidezza torsionale secondaria.

Il bimomento è una caratteristica della sollecitazione interna che nasce per la presenza delle tensioni normali secondarie e la cui espressione è:

$$B = \int_A \sigma_z^{(2)} \lambda_P(s) dA$$

In cui λ_P rappresenta, per sezioni monoconnesse, l'area settoriale, cioè il doppio dell'area spazzata dal raggio vettore OP che, dall'origine O , percorre la linea media della sezione.

Esplicitando la σ_z risulta

$$B = -E\theta''(z) \int_A \lambda^2(s) dA$$

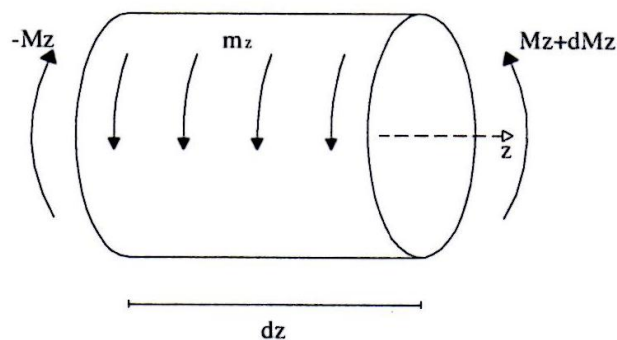
Possiamo pertanto definire la rigidezza secondaria:

$$C_2 = E \int_A \lambda^2 dA$$

-----EQUAZIONE GENERALE DELLA TORSIONE-----

Analizziamo la generica trave di sezione qualunque e di lunghezza L . Il carico applicato è un carico torcente variabile, ripartito per unità di lunghezza: $m_z(z)$. Si indica inoltre con M_z la caratteristica torsionale della sollecitazione interna.

Si procede ad isolare un concio di trave mediante due piani ortogonali all'asse z , passanti per le ascisse z e $z+dz$, come illustrato in figura



Per l'equilibrio alla rotazione del concio di trave attorno all'asse z :

$$-M_z + M_z + dM_z + m_z(z)dz = 0$$

Da cui

$$\frac{dM_z}{dz} = -m_z(z) \quad (I)$$

Le tensioni tangenziali che possono nascere in una sezione sollecitata a torsione sono primarie e secondarie, i cui momenti torcenti risultanti sono rispettivamente:

- momento torcente primario: $M^{(1)} = C_1 \vartheta'$

- momento torcente secondario: $M^{(2)} = C_2 \vartheta'''$

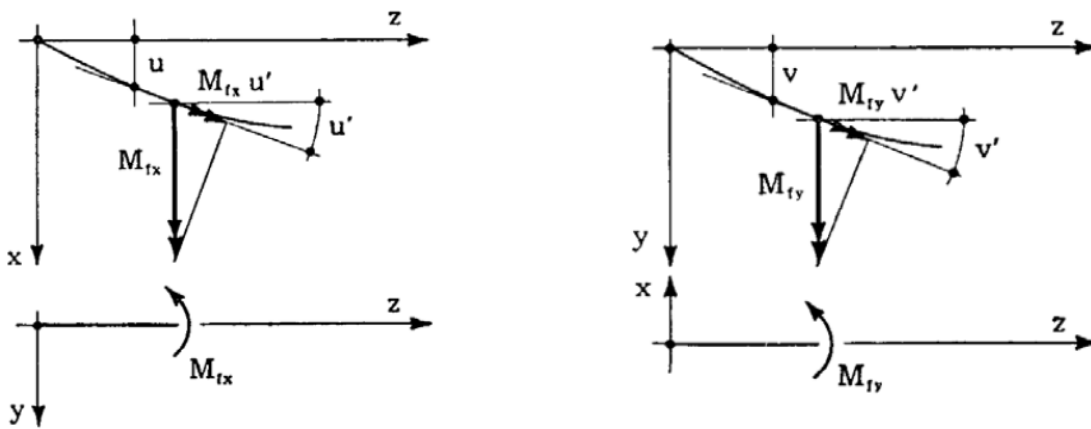
Per l'equilibrio:

$$M^{(1)} + M^{(2)} = M_z$$

Esplicitando i termini e sostituendo nella (I) otteniamo infine:

$$C_2 \vartheta^{IV} + C'_2 \vartheta'''' - C_1 \vartheta'' - C_1 \vartheta' = -\frac{dM_z}{dz} = m_z \quad (II)$$

Valutiamo il momento torcente per sovrapposizione di effetti.



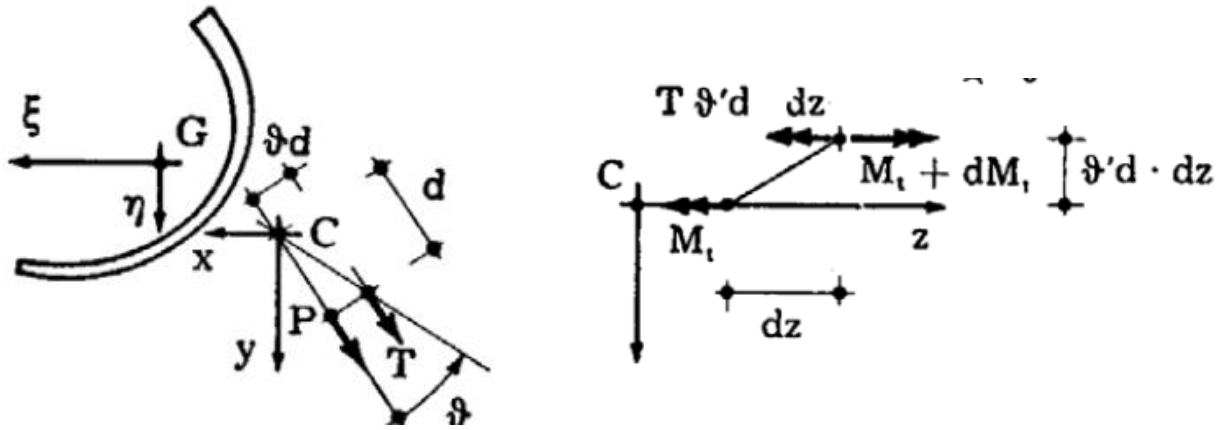
La presenza degli spostamenti u e v induce un momento torcente pari a:

$$M_t = M_{fx} u' + M_{fy} v' \quad (a)$$

Inoltre nel passaggio dall'ascissa z all'ascissa z + dz il momento torcente si incrementa di:

$$\frac{dM_t}{dz} dz = -T_y \frac{du}{dz} dz + T_x \frac{dv}{dz} dz \quad (b)$$

D'altro canto, per effetto della rotazione θ della sezione la retta d'azione non passa più per C ma a distanza θd da quest'ultimo:



quindi dall'equilibrio alla rotazione attorno all'asse z del tronco dz ricaviamo

$$\frac{dM_t}{dz} = T\theta'd \quad (c)$$

Dalle (a), (b), (c) ritroviamo:

$$M'_t = (M_x u')' + (M_y v')' - T_y u' + T_x v' + T\theta d$$

Al momento torcente così computato aggiungiamo l'aliquota dovuta alla presenza delle forze assiali $F_n(z)$:

$$M_{tn} = -\frac{N}{A}\theta' I_c$$

Ricordando inoltre che il baricentro non coincide con il centro di taglio e semplificando mediante opportune sostituzioni otteniamo infine l'equazione che descrive in modo generale le rotazioni θ :

$$C_2 \theta^{IV} + C'_2 \theta''' - \left(C_1 - Fn \frac{I_c}{A}\right) \theta'' - \left(C_1 - Fn \frac{I_c}{A}\right)' \theta' - F(nu')' y_G + F(nv')' x_G + M_x u'' + M_y v'' + T\theta d = 0 \quad (4)$$

EQUAZIONI GENERALI DEL PROBLEMA

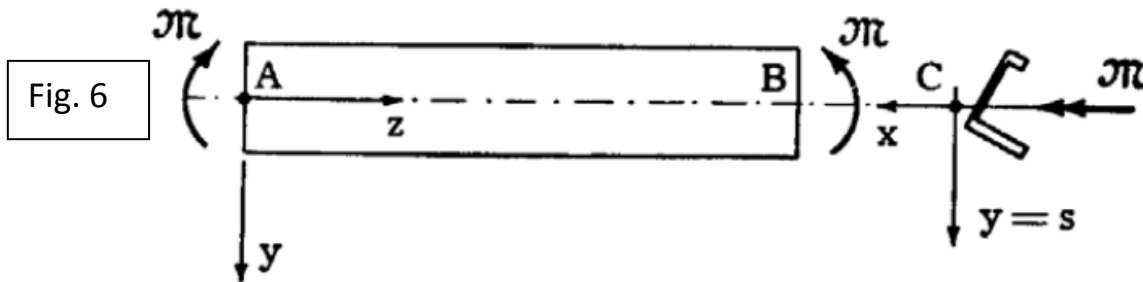
$$(EI_\eta u'')' + Fnu' - Fny_G \theta' - (M_{fy} - M_{fx} \theta)' = 0$$

$$(EI_\xi v'')' + Fnv' + Fnx_G \theta' + (M_{fx} + M_{fy} \theta)' = 0$$

$$C_2 \theta^{IV} + C'_2 \theta''' - \left(C_1 - Fn \frac{I_c}{A}\right) \theta'' - \left(C_1 - Fn \frac{I_c}{A}\right)' \theta' - F(nu')' y_G + F(nv')' x_G + M_x u'' + M_y v'' + T\theta d = 0$$

2.2 La trave soggetta a momento flettente costante

Consideriamo una trave AB di sezione sottile costante soggetta alle estremità a due coppie m agenti secondo un asse principale d'inerzia.



Se y è l'asse di sollecitazione e x l'asse neutro, esiste un valore critico m_c tale che

- Per $m < m_c \rightarrow v \neq 0; u = \theta = 0$
- Per $m \geq m_c \rightarrow v \neq 0$; può anche essere $u \neq 0$ e $\theta \neq 0$

Per $m = m_c$ possiamo determinare gli spostamenti u e le rotazioni θ dalle equazioni (3) (8), in cui $M_x = m$; $M_y = 0$; $n = 0$. Otteniamo:

$$\left. \begin{aligned} EI_\eta u'' + m\theta &= 0 \\ C_2 \theta^{IV} - C_1 \theta'' + m u'' &= 0 \end{aligned} \right\} (1.1)$$

Ricavando u'' dalla prima e sostituendo nella seconda risulta:

$$C_2 \theta^{IV} - C_1 \theta'' - \frac{m^2}{EI_\eta} \theta = 0 \quad (1.2)$$

Risolvendo tale equazione differenziale di IV ordine ricaviamo

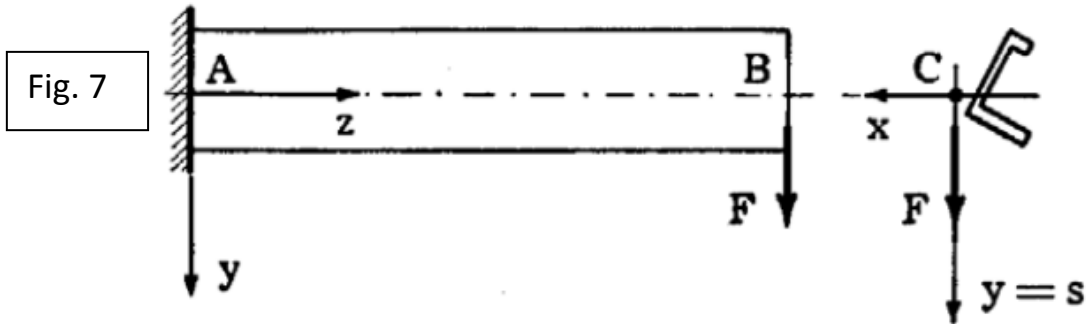
$$m_c = \gamma \frac{\sqrt{EI_\eta C_1}}{l} \quad (1.3)$$

Con

$$\gamma = \pi \sqrt{1 + \frac{C_2}{C_1} \frac{\pi^2}{l^2}}$$

2.3 La Trave a mensola soggetta ad una forza all'estremo

Consideriamo una trave AB a mensola, di sezione costante, soggetta in B ad una forza F ortogonale all'asse parallela ad un asse principale d'inertzia e applicata nel centro di taglio.



Possiamo ricavare gli spostamenti u e le rotazioni θ dalle (3) e (8):

$$\left. \begin{aligned} EI_{\eta} u'' + M_x \theta &= 0 \\ C_2 \theta^{IV} - C_1 \theta'' + M_x u'' &= 0 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

Nel caso in esame risulta:

$$M_x = -f(l - z) \quad (2.2)$$

Sostituendo tale espressione nella (12) e quindi nella (13) otteniamo:

$$C_2 \theta^{IV} - C_1 \theta'' - \frac{F^2}{EI_{\eta}} (l - z)^2 \theta = 0 \quad (2.3)$$

Tale equazione è stata risolta dal Timoshenko, che è pervenuto al valore F_c fornito da

$$F_c = \gamma \sqrt{\frac{EI_{\eta} C_1}{l^2}} \quad (2.4)$$