

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II**



**SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE**

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA PER L'AMBIENTE ED IL TERRITORIO**

**TESI DI LAUREA IN SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

**L'EQUILIBRIO ELASTICO: IL PROBLEMA DELLA  
INSTABILITA' FLESSIO-TORSIONALE**

RELATORE:

CH. MO PROF.  
MARIO PASQUINO

CORRELATORE:

ING. IDA MASCOLO

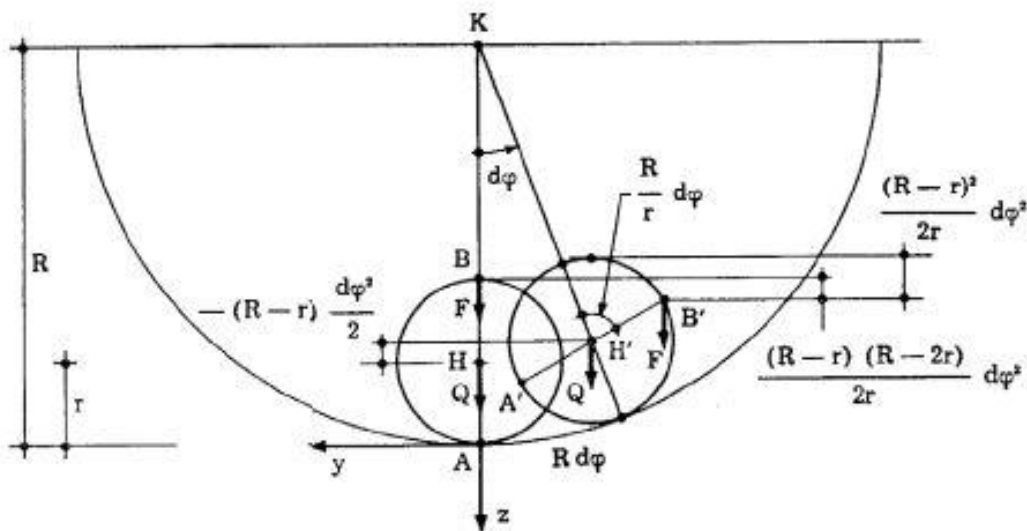
CANDIDATA:

FRANCESCA SORRENTINO  
MATR. N49/072

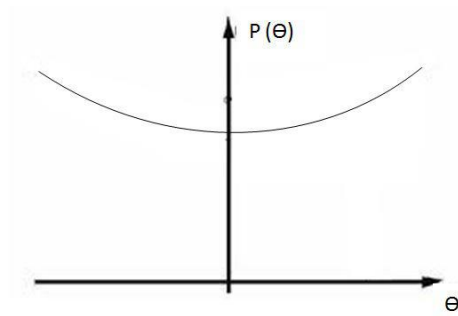
**ANNO ACCADEMICO 2015/2016**

## 1 La stabilità dell'equilibrio elastico

Nel calcolo strutturale oltre che trovare soluzioni equilibrate è importante definire il tipo di equilibrio. Se per Kirchoff la soluzione dell'equilibrio elastico è unica, con la teoria di Eulero sul carico critico possono esserci infinite soluzioni equilibrate ed è quindi necessario verificare se, assegnata una trave caricata assialmente, l'equilibrio è stabile, instabile o indifferente.



- Stabile: perturbando di poco la configurazione iniziale e rettilinea della trave (o aumentando o decentrando lo sforzo assiale) al cessare della causa perturbatrice il sistema riprende la sua configurazione iniziale.
- Instabile: perturbando di poco la configurazione iniziale e rettilinea della trave (o aumentando o decentrando lo sforzo assiale) al cessare della causa perturbatrice il sistema si allontana sempre più dalla sua configurazione iniziale.
- Indifferente: perturbando di poco la configurazione iniziale e rettilinea della trave (o aumentando o decentrando lo sforzo assiale) al cessare della causa perturbatrice il sistema assume una nuova configurazione di equilibrio e la struttura si dice in condizioni critiche ed il carico corrispondente prende il nome di carico critico.



## 2 L'instabilità flessio-torsionale delle travi inflesse



Il problema che si affronta è quello della instabilità flessio-torsionale.

In questo caso gli elementi coinvolti sono sollecitati contemporaneamente da sforzo normale e da momento flettente.

Dunque si vede qual è l'interazione tra le equazioni dovute alla flessione, con i momenti che nascono per effetto della torsione, e le equazioni dovute alla torsione con i momenti torcenti che nascono come componenti dei momenti flettenti causati dagli spostamenti  $u$  e  $v$ .

Quindi si sposta il sistema dalla sua configurazione equilibrata e si utilizzano spostamenti infinitesimi in modo da pervenire alle formule del De Saint Venant per la flessione e alle formule di Vlasov per la torsione.

## 2.1 Equazioni generali del problema

Consideriamo una trave AB con sezione retta sottile comunque variabile (fig.4), in cui i baricentri G ed i centri di taglio C siano situati lungo due rette parallele. La trave sia caricata con forze  $F f(z)$  agenti secondo un asse  $s$  normale all'asse  $z$  dei centri di taglio e passanti per esso, e da forze parallele all'asse  $z$  agenti lungo la retta dei baricentri e tali che nella sezione all'ascissa  $z$  generica sia  $-Fn(z)$  lo sforzo normale.

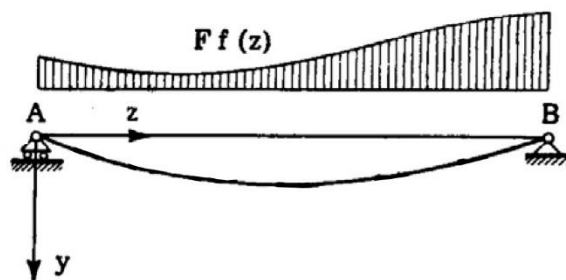


Fig.4



Fig.5

Sia  $d$  la distanza dal centro C del punto P di applicazione delle forze  $F f(z)$  (fig.5); l'asse  $s$  e la distanza  $d$  siano invariabili con  $z$ .

Gli assi principali  $\xi$  ed  $\eta$  siano sulla trave indeformata di direzione invariabile con  $z$ ; gli assi  $x y$ , invariabili con la deformazione e paralleli agli assi  $\xi$  ed  $\eta$  della trave indeformata, abbiano per origine il centro C.

## 2.2 Equazioni degli spostamenti u e v

Scriviamo le equazioni dell'equilibrio variato per un generico concio nel caso di flessione retta rispettivamente secondo  $x$  e  $y$ . Se la trave (e con essa  $\xi$  e  $\eta$ ) presenta le rotazioni  $\theta$  intorno all'asse  $z$ , le flessioni provocate da  $M_x$  e  $M_y$  sono deviate; se però le  $\theta$  sono piccole, gli spostamenti  $u$  e  $v$  secondo  $x$  e  $y$  possono confondersi con quelli secondo gli assi  $\xi$  e  $\eta$ . In tal caso le equazioni scritte saranno valide se sostituiamo ai

momenti  $M_x$  e  $M_y$  quelli relativi agli assi baricentrici ad essi paralleli nella configurazione indeformata.

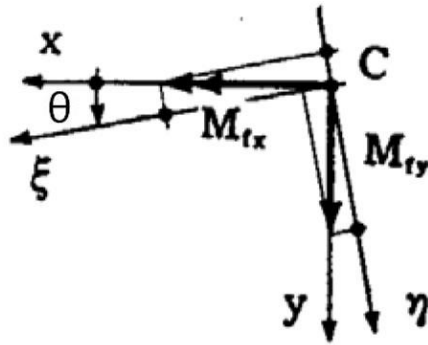


Fig.6

Inoltre, tenendo conto che il centro di taglio non coincide con il baricentro, dove agiscono le forze assiali, aggiungiamo i termini:

$$M_{f\xi} = M_{fx} \cos \theta + M_{fy} \sin \theta$$

$$M_{f\eta} = M_{fy} \cos \theta - M_{fx} \sin \theta$$

Infine, semplificando le espressioni per rotazioni  $\theta$  piccole, otteniamo le equazioni differenziali di terzo ordine che descrivono in modo generico gli spostamenti:

$$(EI_{\eta} u''')' - (M_{fy} - M_{fx} \theta)' = 0 \quad (1)$$

$$(EI_{\xi} v''')' + (M_{fx} + M_{fy} \theta)' = 0 \quad (2)$$

### 2.3 Equazione delle rotazioni $\theta$

Le rotazioni  $\theta$  sono rette dall'equazione più generale della torsione non uniforme valida nel caso in cui i centri di taglio non sono allineati:

$$C_2 \theta^{IV} + C_2' \theta''' - C_1 \theta'' - C_1' \theta' = -\frac{dM_t}{dz} \quad (3)$$

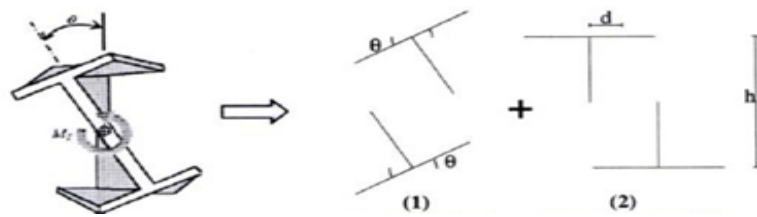


Fig.7

La variazione della funzione ingobbamento  $\psi$  rispetto all'ascissa  $z$  della trave, oltre a rappresentare spostamenti assiali  $w$  differenti per le varie sezioni trasversali, rappresenta anche la seguente componente di deformazione:

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{dw}{dz}$$

In tali circostanze l'angolo unitario di torsione

$$\theta' = \frac{M^{(1)}}{C_1}$$

(per sezione monoconnessa)

$$C_1 = \frac{G}{3} \int_s \delta^3(s) ds$$

non è più costante da sezione a sezione, ma variabile con  $z$ .

Risulterà pertanto  $\theta'' \neq 0$ ; per valutare tale parametro ci riferiamo ad una espressione analoga a quella utilizzata per  $\theta'$ :

$$\theta'' = \frac{B}{C_2}$$

Dove  $B$  rappresenta il bimomento e  $C_2$  la rigidezza torsionale secondaria.

Il bimomento è una caratteristica della sollecitazione interna che nasce per la presenza delle tensioni normali secondarie e la cui espressione è:

$$B = \int_A \sigma_z^{(2)} \lambda_p(s) dA$$

In cui  $\lambda_p$  rappresenta, per sezioni monoconnesse, l'area settoriale, cioè il doppio dell'area spazzata dal raggio vettore OP che, dall'origine O, percorre la linea media della sezione.

Esplicitando la  $\sigma_z$  risulta

$$B = -E\theta''(z) \int_A \lambda^2(s) dA$$

Possiamo pertanto definire la rigidezza secondaria:

$$C_2 = E \int_A \lambda^2 dA$$

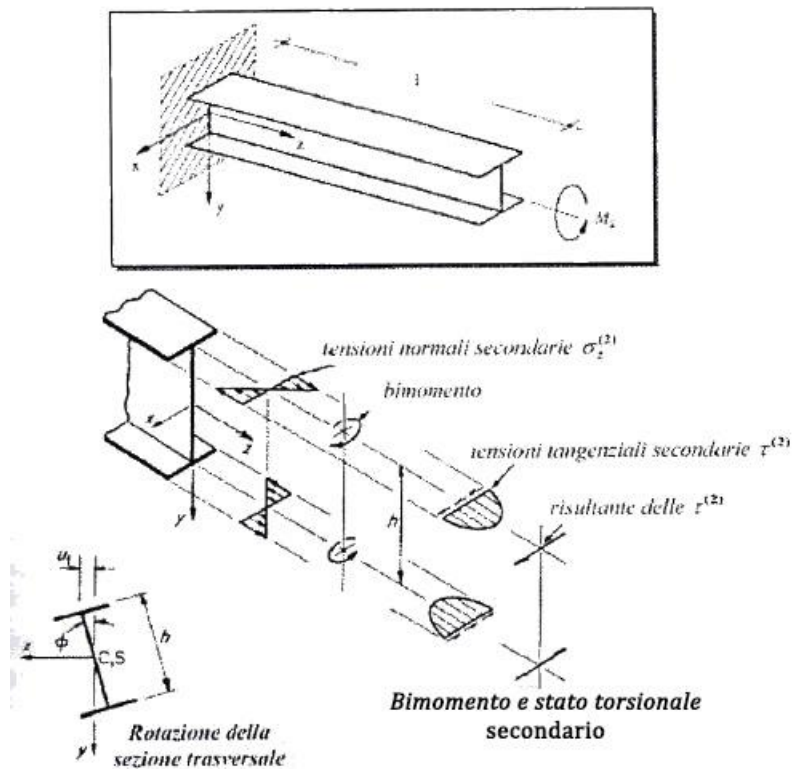


Fig.8

## 2.4 Equazione Generale della Torsione

Analizziamo la generica trave di sezione qualunque e di lunghezza  $L$ . Il carico applicato è un carico torcente variabile, ripartito per unità di lunghezza:  $m_z(z)$ . Si indica inoltre con  $M_z$  la caratteristica torsionale della sollecitazione interna. Si procede ad isolare un concio di trave mediante due piani ortogonali all'asse  $z$ , passanti per le ascisse  $z$  e  $z+dz$ , come illustrato in figura

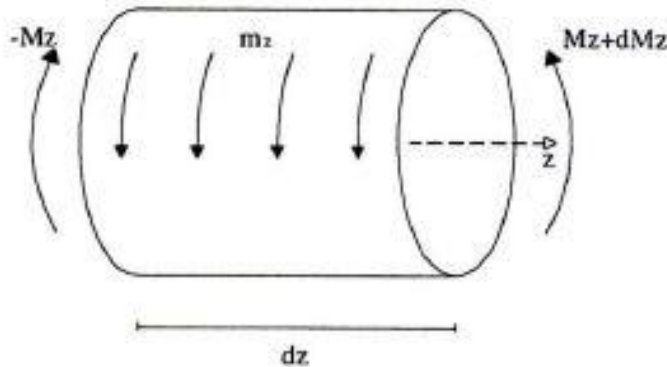


Fig.9

Per l'equilibrio alla rotazione del concio di trave attorno all'asse  $z$ :

$$-M_z + M_z + dM_z + m_z(z)dz = 0$$

Da cui:

$$\frac{dM_z}{dz} = -m_z(z) \quad (\text{I})$$

Le tensioni tangenziali che possono nascere in una sezione sollecitata a torsione sono primarie e secondarie, i cui momenti torcenti risultanti sono rispettivamente:

- momento torcente primario:

$$M^{(1)} = C_1 \theta'$$

- momento torcente secondario:

$$M^{(2)} = C_2 \theta'''$$

Per l'equilibrio:

$$M^{(1)} + M^{(2)} = M_z$$

Esplicitando i termini e sostituendo nella (I) otteniamo infine:



$$C_2 \theta^{IV} + C_2' \theta''' - C_1 \theta'' - C_1' \theta' = -\frac{dM_z}{dz} = m_z \quad (\text{II})$$

Valutiamo il momento torcente per sovrapposizione di effetti.

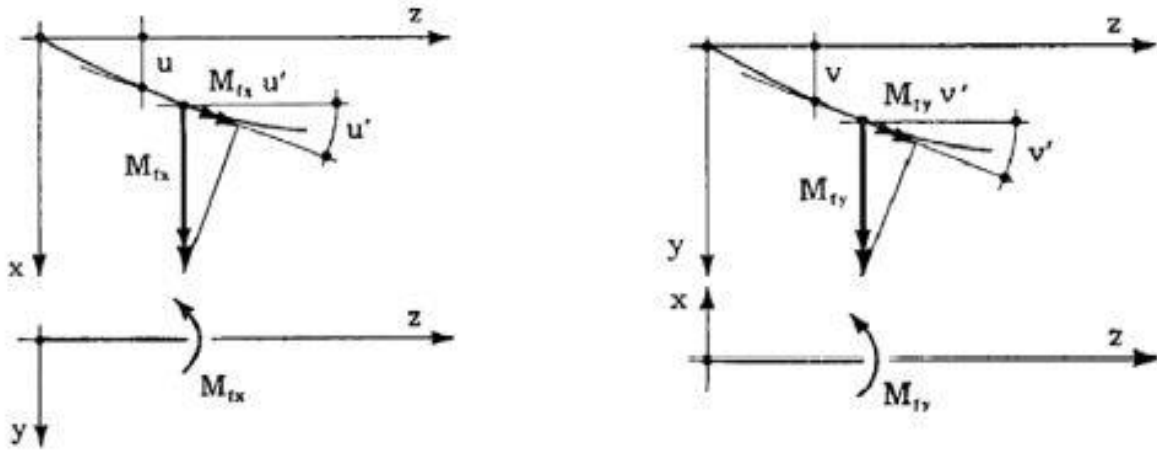


Fig.10

La presenza degli spostamenti  $u$  e  $v$  induce un momento torcente pari a:

$$M_t = M_{fx} u' + M_{fy} v' \quad (\text{a})$$

Inoltre nel passaggio dall'ascissa  $z$  all'ascissa  $z + dz$  il momento torcente si incrementa di:

$$\frac{dM_t}{dz} dz = -T_y \frac{du}{dz} dz + T_x \frac{dv}{dz} dz \quad (\text{b})$$

D'altro canto, per effetto della rotazione  $\theta$  della sezione la retta d'azione non passa più per  $C$  ma a distanza  $\theta d$  da quest'ultimo:

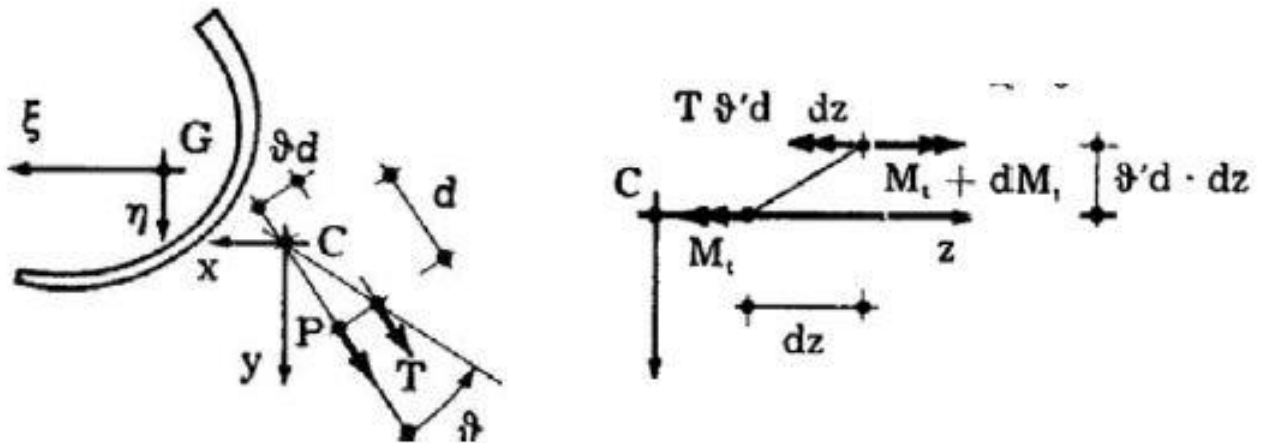


Fig.11

Quindi dall'equilibrio alla rotazione attorno all'asse z del tronco  $dz$  ricaviamo:

$$-M_t + M_t + dM_t - Td\theta'dz = 0$$

Da cui:

$$\frac{dM_t}{dz} = T\theta'd \quad (c)$$

Dalle (a), (b), (c) ritroviamo:

$$M_t' = (M_x u')' + (M_y v')' - T_y u' + T_x v' + T\theta'd$$

Ricordando inoltre che il baricentro non coincide con il centro di taglio e semplificando mediante opportune sostituzioni otteniamo infine l'equazione che descrive in modo generale le rotazioni  $\theta$ :

$$C_2 \theta^{IV} + C_2' \theta''' - C_1 \theta'' - C_1' \theta' + M_{fx} u'' + M_{fy} v'' + T\theta'd = 0$$

(4)

Equazioni generali del problema:

$$(EI_{\eta} u'')' - (M_{fy} - M_{fx} \theta)' = 0$$

$$(EI_{\xi} v'')' + (M_{fx} + M_{fy} \theta)' = 0$$

$$C_2 \theta^{IV} + C_2' \theta''' - C_1 \theta'' - C_1' \theta' + M_{fx} u'' + M_{fy} v'' + T \theta' d = 0$$

### 3 La trave soggetta a momento flettente costante

Consideriamo una trave AB di sezione sottile costante soggetta alle estremità a due coppie  $m$  agenti secondo un asse principale d'inerzia.

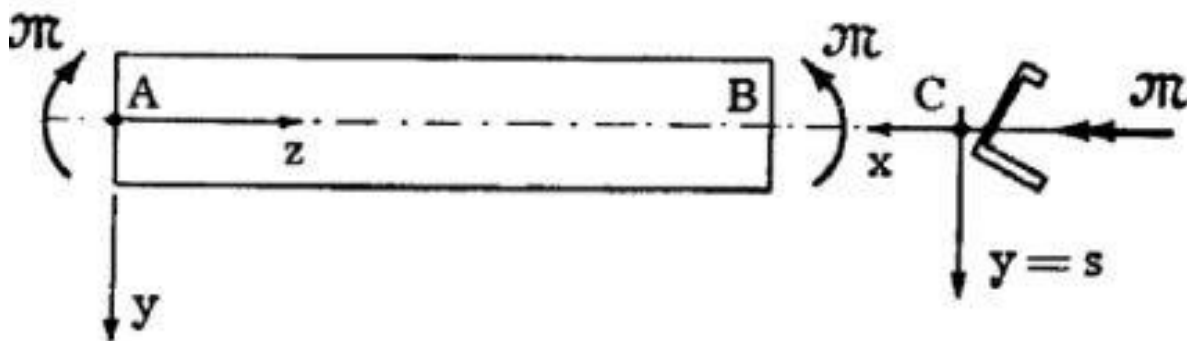


Fig.12

Se  $y$  è l'asse di sollecitazione e  $x$  l'asse neutro, esiste un valore critico  $m_c$  tale che

- Per  $m < m_c \rightarrow v \neq 0 ; u = \theta = 0$

- Per  $m \geq m_c \rightarrow v \neq 0$ ; può anche essere  $u \neq 0$  e  $\theta \neq 0$

Per  $m = m_c$  possiamo determinare gli spostamenti  $u$  e le rotazioni  $\theta$ , in cui  $M_x = m$ ;  $M_y = 0$ ;  $n = 0$ . Otteniamo:

$$EI_{\eta} u'' + m \theta = 0$$

$$C_2 \theta^{IV} - C_1 \theta'' + m u'' = 0$$

Ricavando  $u''$  dalla prima e sostituendo nella seconda risulta:

$$C_2 \theta^{IV} - C_1 \theta'' - \frac{m^2}{EI_\eta} \theta = 0$$

Risolviendo tale equazione differenziale di IV ordine ricaviamo

$$m_c = \gamma \frac{\sqrt{EI_\eta C_1}}{l}$$

Con

$$\gamma = \pi \sqrt{1 + \frac{C_2}{C_1} \frac{\pi^2}{l^2}}$$

#### **4 La Trave a mensola soggetta ad una forza all'estremo**

Consideriamo una trave AB a mensola, di sezione costante, soggetta in B ad una forza F ortogonale all'asse parallela ad un asse principale d'inerzia e applicata nel centro di taglio.

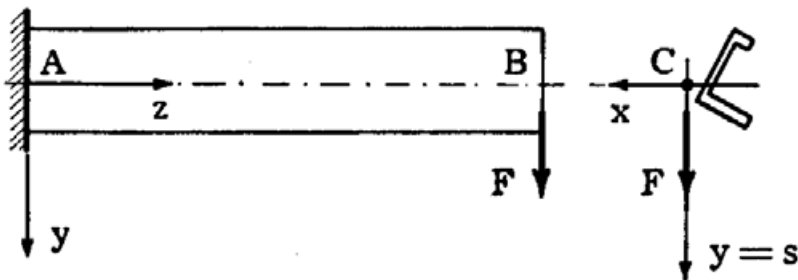


Fig.13

Possiamo ricavare gli spostamenti  $u$  e le rotazioni  $\theta$ :

$$EI_\eta u'' + M_{fx} \theta = 0$$

$$C_2 \theta^{IV} - C_1 \theta'' + M_{fx} u'' = 0.$$

Nel caso in esame risulta:

$$M_{fx} = -F(\ell - z),$$

e quindi otteniamo:

$$C_2 \theta^{IV} - C_1 \theta'' - \frac{F^2}{EI_\eta} (\ell - z)^2 \theta = 0 \quad (d)$$

Tale equazione è stata risolta dal Timoshenko, che è pervenuto al valore  $F_c$  fornito da:

$$F_c = \gamma \frac{\sqrt{EI_\eta} C_1}{\ell^2}$$

Per una sezione allungata la (d) si scrive:

$$C_1 \theta'' + \frac{F^2}{EI_y} (\ell - z)^2 \theta = 0$$

Da cui

$$F_c = \frac{4,013}{\ell^2} \sqrt{EI_y C_1} \quad (e)$$

Se la forza  $F$  è applicata alla distanza  $d$  dal centro di taglio, il valore di  $F_c$  varia.

Timoshenko fornisce per una sezione rettangolare allungata, la seguente formula approssimata:

$$F_c = \frac{4,013}{\ell^2} \sqrt{EI_y C_1} \left( 1 + \frac{d}{\ell} \sqrt{\frac{EI_y}{C_1}} \right) \quad (f)$$

Dove  $d$  è positiva se la forza è applicata al di sotto del centro di taglio; in questo caso la formula (f) fornisce un valore più elevato della formula (e)

Inoltre il *Timoshenko* fornisce il valore critico sempre per una trave a sezione rettangolare allungata, soggetta ad un carico  $q$  uniformemente distribuito:

$$(ql)_c = \frac{12,85}{\ell^2} \sqrt{EI_y C_1},$$

circa il triplo del valore in formula (e).

## 5 Il caso del ponte di Tacoma



Un caso eclatante di crollo per instabilità flessio-torsionale è quello del ponte di Tacoma. Il ponte per come era stato costruito non aveva la rigidezza necessaria per contrastare le azioni dinamiche del vento, inoltre era costituito da un impalcato molto sottile e leggero, per cui accanto alle oscillazioni verticali, dovute ai carichi di esercizio, un vento costante ha indotto le rotazioni torsionali che hanno portato al crollo.

