Valutazione del campo di spostamenti indotti in semispazi isotropi da distribuzioni arbitrarie di pressioni verticali

Relatore:

Ch. mo. Prof. Luciano Rosati

Co-relatore:

Ing. Francesco Marmo

Candidato :

Sorrentino Giuseppe

Anno accademico 2012/2013

Obiettivo:

- Estendere il campo d’applicazione della classica espressione di Boussinesq che permette di ricavare la distribuzione delle tensioni verticali indotte, in ipotesi di semispazio elastico, omogeneo, isotropo, da una forza concentrata.

- Estendere le metodologie ed i risultati presentati di recente in letteratura con riferimento a un carico distribuito variabile con legge lineare:

❑ *Algin “Stresses from linearly distributed pressures over rectangular areas”, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. [2000]*

❑ *Algin “Vertical stress formula for pressure over rectangular areas”, Geotechnique [2001]*

A tal fine verrà ricavata l’espressione delle tensioni verticali in un punto qualsiasi del semispazio esaminato, esprimendo il risultato in funzione del carico applicato e delle sole coordinate dei vertici della regione di carico assunta di forma poligonale.

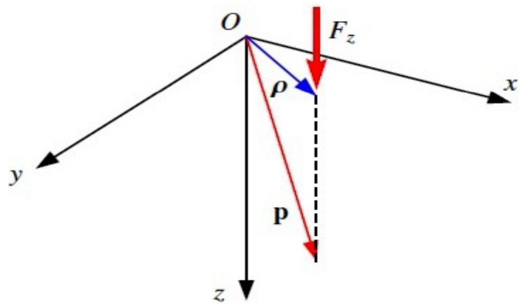
Procedura utilizzata:

1) Utilizzando il teorema di Gauss, si mostrerà come trasformare l’integrale doppio (2D) che appare nell’espressione della tensione verticale, risultante dall’applicazione della soluzione di Boussinesq in base al principio di sovrapposizione degli effetti, in integrale monodimensionale (1D)

2) L’integrale così ottenuto verrà quindi specializzato come somma di espressioni algebriche dipendenti, oltre che dal carico applicato, dalle coordinate dei vertici della regione di carico, assunta di forma poligonale

1. Schematizzazione del problema:

- La formula di Boussinesq si riferisce al caso di una forza concentrata:

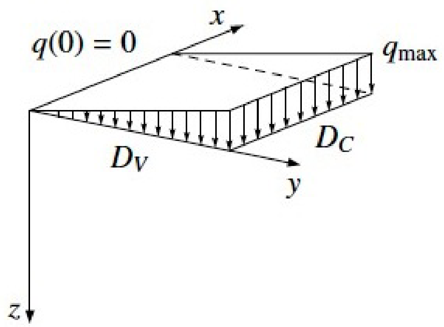


$$\sigma_z = \frac{-3F_z}{2\pi}\,\frac{z^3}{(\mathbf{p}.\mathbf{p})^{5/2}} = \frac{-3F_z}{2\pi}\,\frac{z^3}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

- Sebbene la trattazione qui esposta possa essere applicata a casi con distribuzioni più complesse di carichi verticali:

- *M.G.D'Urso e F.Marmo "Vertical stress distribution in isotropic half-spaces due to surface vertical loadings acting over polygonal domains" , ZAMM [2013]*

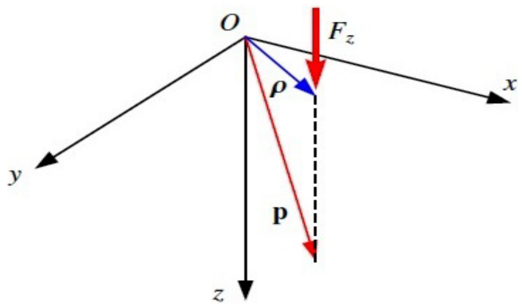
- Il caso che andremo ad esaminare riguarda esplicitamente carichi variabili con legge lineare:



$$q(\rho) = q_0 + \underline{\mathbf{g}}.\underline{\boldsymbol{\rho}}$$

laddove q_0 è uno scalare e $\underline{\mathbf{g}}$ il gradiente della funzione di carico.

- Essendo interessati alla valutazione delle tensioni indotte da distribuzioni lineari di carichi verticali, il sistema di riferimento viene assunto con origine nell'intersezione tra z = 0 e la verticale passante per il punto in cui valutare la tensione verticale.



- Infatti, in virtù del teorema di Betti, risulterà altresì:

$$\sigma_z(0,0,z) = \frac{-3F_z}{2\pi} \frac{z^3}{(\underline{\rho} . \underline{\rho} + z^2)^{5/2}}$$

- Essendo $\underline{\rho} = (x,y)^t$ il vettore composto dalle coordinate del punto di applicazione del carico.

- Indicando con Ω il dominio di applicazione del carico, si ricava, dalla formula di Boussinesq:

$$\sigma_q = \frac{-3z^3}{2\pi}\left[q_0 \int_\Omega \frac{d\Omega}{(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{5/2}} + \underline{g}\,. \int_\Omega \frac{\underline{\rho}\,d\Omega}{(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{5/2}} \right]$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$I_0 \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{i}_1$$

- Potremo quindi scrivere più semplicemente:

$$\sigma_q = \frac{-3z^3}{2\pi} \left[q_0 I_0 + \underline{g}.\underline{i}_1 \right]$$

- Ogniqualvolta che Ω assume una forma poligonale, σ_q risulterà ricavabile analiticamente dalla valutazione degli integrali I_0,$\underline{i}_1$.

- Ciò verrà ottenuto, come già accennato, tramite un opportuno uso del teorema di Gauss.

3.1 Calcolo dell'integrale I_0

- Per ricavare I_0 utilizzeremo l'espressione:

$$I = \int_{\Omega} \mathrm{div}\left[\frac{\underline{\rho}}{(\underline{\rho}.\underline{\rho})(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{3/2}} \right] d\Omega$$

- L'argomento della divergenza risulterà singolare se l'origine del sistema di riferimento giace all'interno della regione di carico Ω, ossia per $\underline{\rho} = \underline{\mathbf{0}}$.

- Utilizzando l'identità differenziale:

$$\mathrm{div}\,(\phi\, \underline{u}) = (\mathrm{grad}\, \phi)\, \underline{u} + \phi\, \mathrm{div}\, \underline{u}$$

dove ϕ e u sono, rispettivamente, un campo scalare e un campo vettoriale.

- Risulterà:

$$I = \int_{\Omega} \frac{\underline{\rho}}{(\underline{\rho}.\underline{\rho})} .\mathrm{grad}\left[\frac{1}{(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{3/2}} \right] d\Omega \;+\; \int_{\Omega} \frac{1}{(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{3/2}}\, \mathrm{div}\, \frac{\underline{\rho}}{(\underline{\rho}.\underline{\rho})}\, d\Omega$$

3.2 Calcolo dell'integrale I_0

- In particolare:

$$\mathrm{grad}\ \frac{1}{(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{3/2}} = -3\ \frac{\underline{\rho}}{(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{3/2}}$$

- sicché:

$$\int_\Omega \frac{\underline{\rho}}{(\underline{\rho}.\underline{\rho})} . \mathrm{grad}\left[\frac{1}{(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{3/2}}\right] d\Omega \Longrightarrow -3 \int_\Omega \frac{1}{(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{5/2}} d\Omega$$

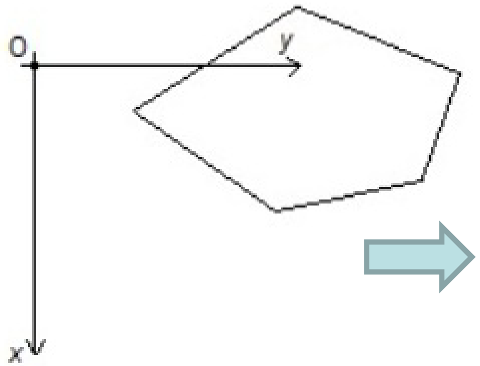
- La singolarità che si ottiene quando $\underline{\rho} = \underline{\mathbf{0}}$ può essere calcolata ricorrendo alla teoria delle distribuzioni e all'identità differenziale, ottenendo così:

$$\mathrm{div}\ \frac{\underline{\rho}}{(\underline{\rho}.\underline{\rho})} = 0 \quad \text{per } \underline{\rho} \neq \underline{\mathbf{0}} \text{ ; mentre } \int_\Omega \phi(\rho)\ \mathrm{div}\left[\frac{\underline{\rho}}{(\underline{\rho}.\underline{\rho})}\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{\mathbf{0}} \notin \Omega \\ \alpha(\underline{\mathbf{0}})\ \phi(\underline{\mathbf{0}}) & \text{se } \underline{\mathbf{0}} \in \Omega \end{cases}$$

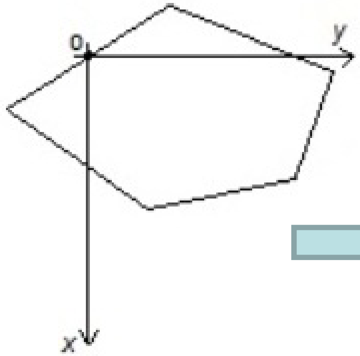
- Essendo α l'angolo, espresso in radianti, formato dall'intersezione tra Ω e un intorno del punto $\rho = 0$.

3.3 Valori di α in alcuni casi significativi

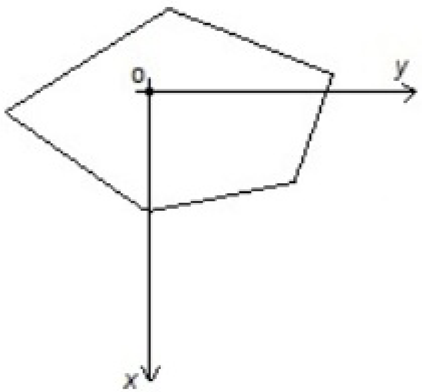
- In particolare:



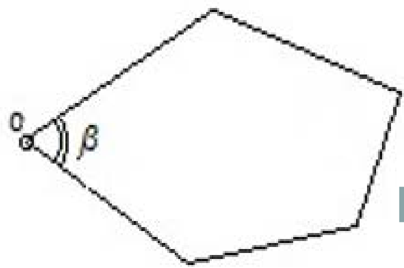
$\alpha(\underline{\mathbf{0}}) = 0$



$\alpha(\underline{\mathbf{0}}) = \pi$



$\alpha(\underline{\mathbf{0}}) = 2\pi$



$\alpha(\underline{\mathbf{0}}) = \beta$

- Un algoritmo di calcolo automatico del valore di α può essere trovato in:

❑ *M.G. D'Urso e P.Russo "A new algorithm for point-in-polygon test", Survey Review [2002]*

3.4 Calcolo dell'integrale I_0

- In definitiva:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{3/2}} \operatorname{div} \frac{\underline{\rho}}{(\underline{\rho}.\underline{\rho})} \, d\Omega = \frac{\alpha(\underline{\mathbf{0}})}{z^3}$$

- e pertanto, ricorrendo alle formule precedentemente sviluppate e applicando il teorema di Gauss:

$$I_0 = \int_{\Omega} \frac{d\Omega}{(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{5/2}} = \frac{\alpha(\underline{\mathbf{0}})}{3z^3} - \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \frac{\underline{\rho} \cdot \underline{\boldsymbol{v}}}{(\underline{\rho}.\underline{\rho})(\underline{\rho}.\underline{\rho} + z^2)^{3/2}} \, d\Omega$$

- Laddove $\partial\Omega$ è la frontiera del dominio e $\underline{\boldsymbol{v}}$ la relativa normale.

❖ *Come accennato nell'introduzione, abbiamo trasformato l'integrale d'area in uno di linea.*

3.3 Calcolo di I_0 per un dominio poligonale

- Sia assegnata la frontiera $\partial\Omega$ della regione di applicazione del carico come poligono costituito da n_v vertici, le cui coordinate compongono il vettore $\underline{\boldsymbol{\rho}}_i = (x_i, y_i)$, con $i = 1,\ldots,n_v$.
- Applicando la formula risolutiva precedentemente ricavata otterremo:

$$I_0 = \frac{\alpha(\underline{\mathbf{0}})}{3z^3} - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n_v}\int_0^{l_i} \frac{\underline{\boldsymbol{\rho}}(s_i) \,.\, \underline{\boldsymbol{v}}_i}{[\, \underline{\boldsymbol{\rho}}\,(s_i).\underline{\boldsymbol{\rho}}\,(s_i)\,][\, \underline{\boldsymbol{\rho}}\,(s_i).\underline{\boldsymbol{\rho}}\,(s_i) + z^2\,]^{3/2}}\, ds_i$$

- s_i è l'ascissa curvilinea lungo l'i-esimo lato del poligono.
- $l_i = \left| \underline{\boldsymbol{\rho}}_{i+1} - \underline{\boldsymbol{\rho}}_i \right|$ è la lunghezza del lato considerato.
- $\underline{\boldsymbol{v}}_i$ è il versore della normale uscente dal lato considerato.

- Per calcolare l'integrale rappresentiamo il lato i-esimo in forma parametrica come segue:

$$\underline{\boldsymbol{\rho}}\,[\, \lambda_i\,(s_i)\,] = [\, 1 - \lambda_i(s_i)\,]\, \underline{\boldsymbol{\rho}}_i + \lambda_i(s_i)\underline{\boldsymbol{\rho}}_{i+1} \qquad \text{dove } \lambda_i(s_i) = s_i / l_i$$

- L'integrale quindi diventerà: $\quad I_0 = \dfrac{\alpha(\underline{\mathbf{0}})}{3z^3} - \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_v} (\, \underline{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \underline{\boldsymbol{\rho}}_{i+1}^{\perp}\,)\; H_{0i}$

- dove, ponendo:

$$a_i = (\underline{\boldsymbol{\rho}}_{i+1} - \underline{\boldsymbol{\rho}}_i) \cdot (\underline{\boldsymbol{\rho}}_{i+1} - \underline{\boldsymbol{\rho}}_i)$$

$$b_i = \underline{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot (\underline{\boldsymbol{\rho}}_{i+1} - \underline{\boldsymbol{\rho}}_i)$$

$$c_i = \underline{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \underline{\boldsymbol{\rho}}_i$$

$$d_i = \underline{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \underline{\boldsymbol{\rho}}_i + z^2$$

- si ottiene:

$$H_{0i} = \frac{b_i}{z^2 (a_i d_i - b_i^2)\sqrt{d_i}} - \frac{a_i + b_i}{z^2 (a_i d_i - b_i^2)\sqrt{a_i + 2b_i + d_i}} +$$

$$+ \frac{a}{z^3 \sqrt{a_i c_i - b_i^2}} \left[\arctan \frac{z(a_i + b_i)}{\sqrt{a_i c_i - b_i^2}\sqrt{a_i + 2b_i + d_i}} - \arctan \frac{z b_i}{\sqrt{a_i c_i - b_i^2}\sqrt{d_i}} \right]$$

- In conclusione quindi I_0 verrà ricavato mediante la seguente formula:

$$I_0 = \frac{\alpha(0)}{3z^3} - \frac{1}{3} \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n_v} (\underline{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \underline{\boldsymbol{\rho}}_{i+1}^{\perp}) H_{0i}$$

se il lato j contiene l'origine, il calcolo di H_{0j} va omesso

- con: $\underline{\boldsymbol{\rho}}_i = \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}$; $\underline{\boldsymbol{\rho}}_{i+1}^{\perp} = \begin{vmatrix} y_{i+1} \\ -x_{i+1} \end{vmatrix}$

4. Calcolo di i_1

- La procedura per il calcolo dell'integrale i_1 è del tutto analoga a quella vista per I_0; di fatti avremo che:

$$i_1 = -\frac{1}{3}\int_{\Omega} \mathrm{grad}\left[\frac{1}{(\boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{\rho} + z^2)^{3/2}}\right] d\Omega$$

$$\Downarrow$$

$$i_1 = -\frac{1}{3}\int_{\partial\Omega} \frac{\underline{\boldsymbol{v}}\, ds}{(\boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{\rho} + z^2)^{3/2}}$$

- seguendo i passaggi già svolti per I_0 otteniamo:

$$i_1 = -\frac{1}{3}\sum_{i=1,\, i\neq j}^{n_v} \left(\underline{\boldsymbol{\rho}}_{i+1}^{\perp} - \underline{\boldsymbol{\rho}}_{i}^{\perp} \right) H_{1i}$$

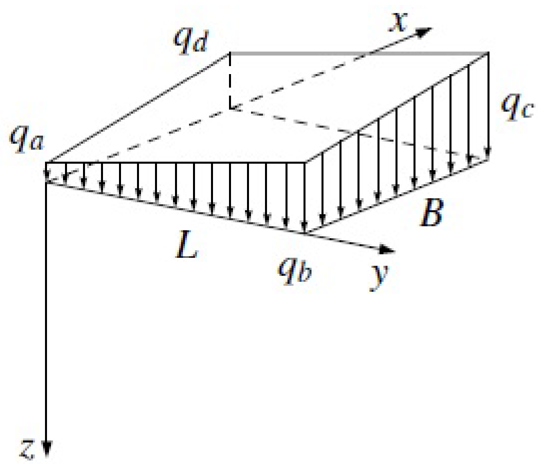
se il lato j contiene l'origine, il calcolo di H_{1j} va omesso

- dove H_{1i} è pari a:

$$H_{1i} = \frac{1}{b_i^2 - a_i d_i}\left[\frac{b_i}{\sqrt{d_i}} - \frac{a_i + b_i}{\sqrt{a_i + 2b_i + d_i}}\right]$$

4. Esempio Applicativo, svolto manualmente

- Sia assegnato un dominio rettangolare, sottoposto ad un carico che varia con legge lineare:

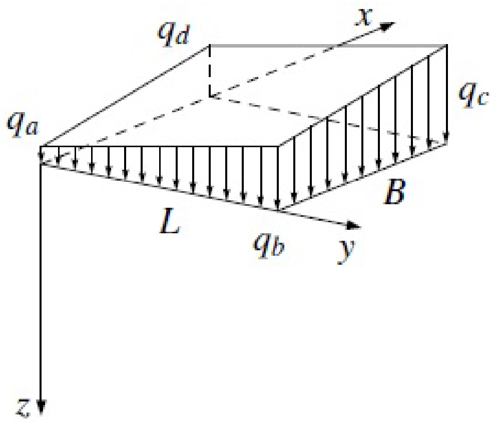


- Per ottenere una soluzione senza dover ricorrere all'uso di un programma di calcolo basta scomporre il carico in modo da avere una somma finita di "carichi elementari" per i quali disponiamo di tabelle e grafici che forniscono l'andamento delle relative tensioni verticali.

- Prima però, va fatta un'ulteriore distinzione: ovvero se il punto in cui vogliamo valutare la tensione verticale, in funzione della profondità, è o meno interno al dominio di carico.

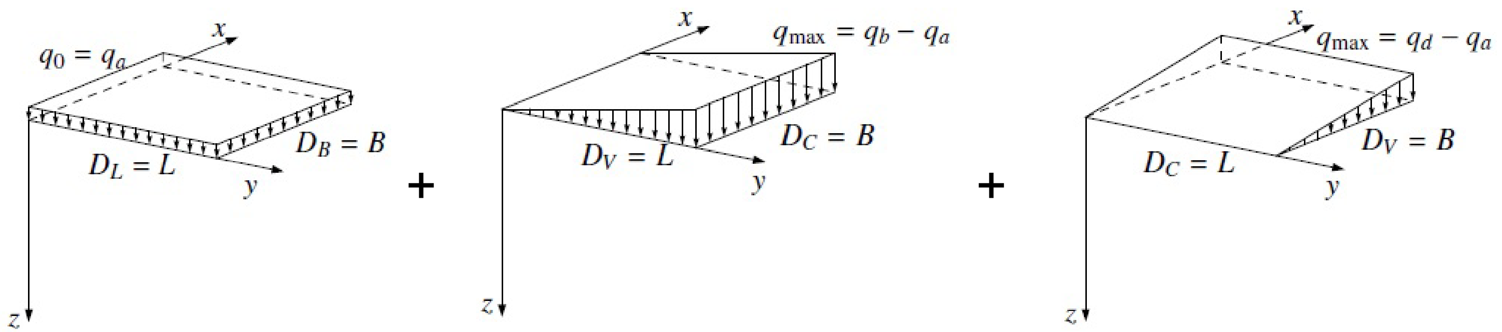
- In entrambi i casi il procedimento è concettualmente identico, la differenza nei due casi consisterà solo nei segni di alcuni dei termini che andremo ad utilizzare.

- Il calcolo delle tensioni verticali nel caso di un carico distribuito che varia con legge lineare può essere affrontato come segue:



Scomponiamo:

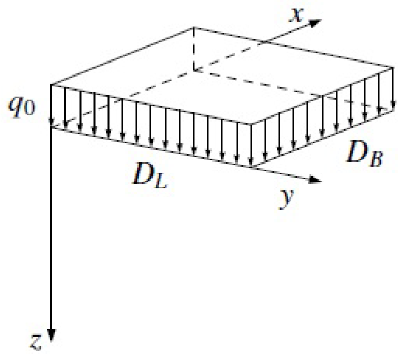
<u>*poniamo $q_0 = q_a$*</u>



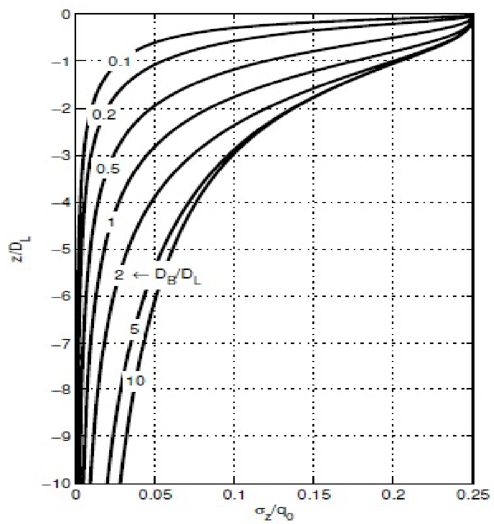
- Ovvero abbiamo scomposto il carico di partenza in una somma di un carico costante e due carichi che variano con legge lineare.

Per il calcolo delle tensioni verticali indotte da carichi distribuiti su di aree rettangolari, sono stati ricavati, con l’approccio proposto, tabelle e grafici numerici relativi ad alcuni casi “elementari”:

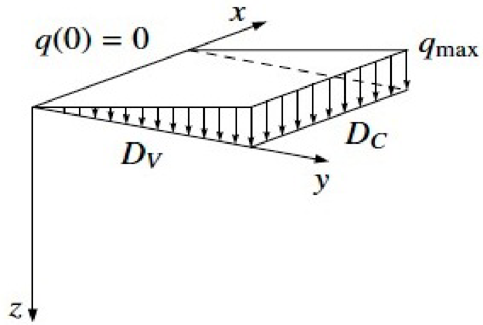
- Regione rettangolare di dimensioni D_L x D_B con un carico uniformemente distribuito:



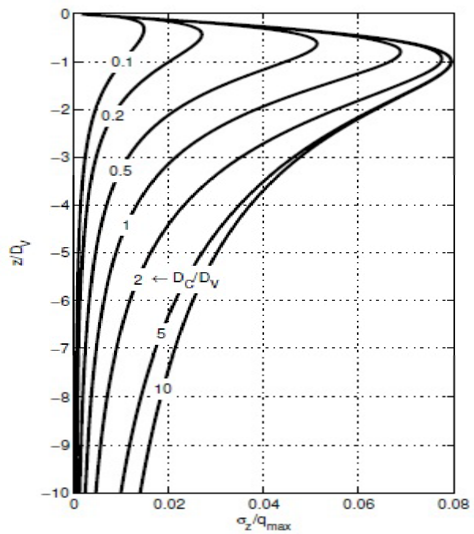
- Il relativo grafico riporta l’andamento di σ_z / q_0 in funzione del rapporto D_B / D_L



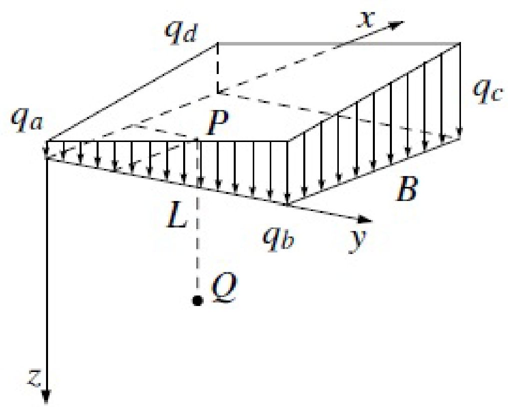
- Regione rettangolare di dimensioni D_v x D_c con un carico che varia con legge lineare:



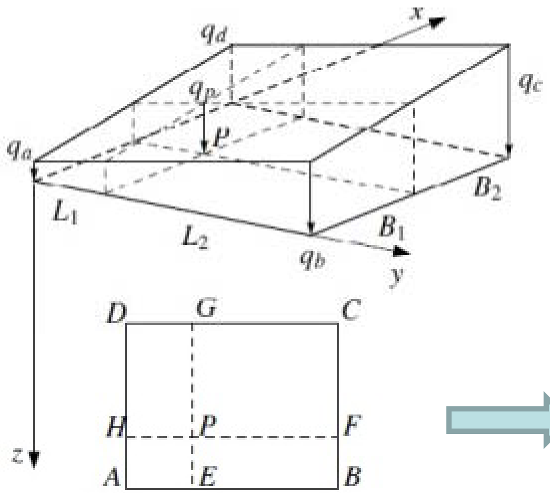
- Il relativo grafico riporta l’andamento di σ_z / q_{max} in funzione del rapporto D_c / D_v



- A titolo d'esempio consideriamo il caso in cui il punto Q, in cui vogliamo calcolare la tensione verticale, sia interno al dominio:



- Oltre a eseguire la scomposizione del carico già effettuata, scomponiamo ulteriormente anche l'area rettangolare, in modo che il punto P risulti il vertice di ciascun sub-rettangolo in cui è stata suddivisa l'area di carico originaria:



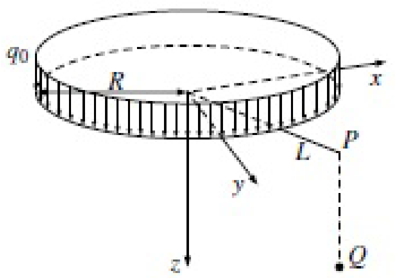
Il contributo di ogni rettangolo verrà sommato per ottenere alla fine:

$$\sigma_z^{ABCD} = \sigma_z^{PFCG} + \sigma_z^{PGDH} + \sigma_z^{PHAE} + \sigma_z^{PEBF}$$

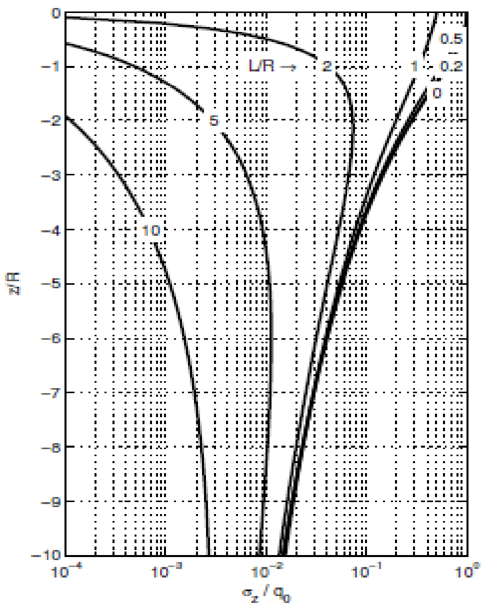
5. Area di carico di forma circolare

L'approccio proposto può essere applicato anche a domini di forma circolare. Assegnato un dominio circolare di raggio *R,* volendo calcolare la tensione verticale a una distanza *L* dal centro della regione di carico, avremo ancora due casi elementari:

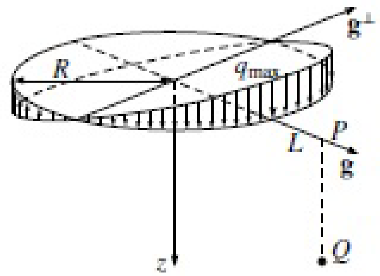
- In caso di carico costante pari a q_0:



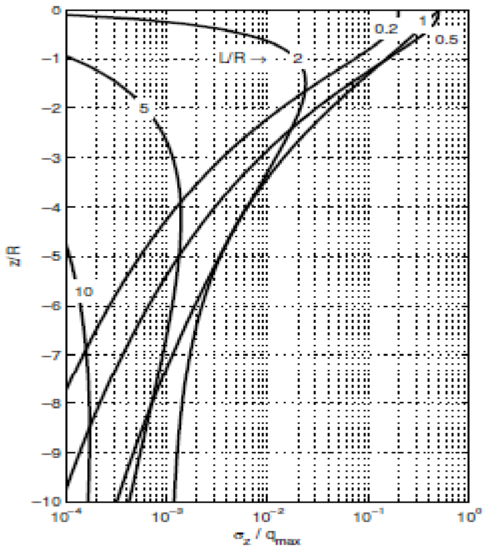
- Il relativo grafico riporta l'andamento di σ_z / q_0 in funzione dei rapporti L / R e z / R



- In caso di carico che varia con legge lineare:



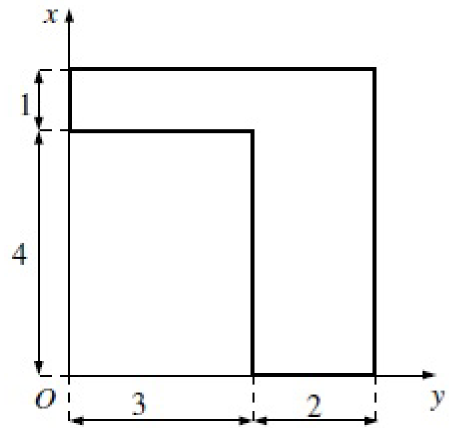
- Gli assi $\mathbf{g}^{\perp}$ e *z* formano un piano antisimmetrico, quindi i punti al di sotto la verticale di $\mathbf{g}^{\perp}$ avranno $\sigma_z = 0$. Al contrario, i punti che giacciono sul piano ***g***-*z* avranno $\sigma_z \neq 0$ e il rapporto σ_z / q_{max} varierà in funzione dei rapporti L / R e z / R



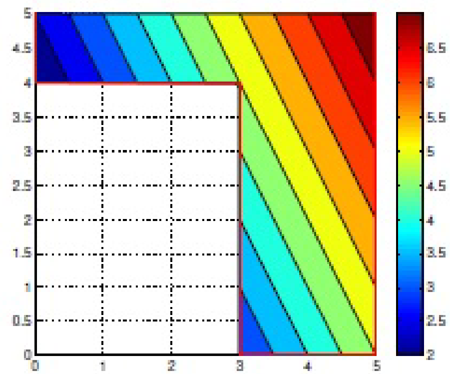
6. Esempio col metodo proposto

Invece di dover ricorrere a varie suddivisioni di carico e ad abachi, il metodo proposto ci consente di ricavare immediatamente i grafici relativi alle tensioni ricercate.

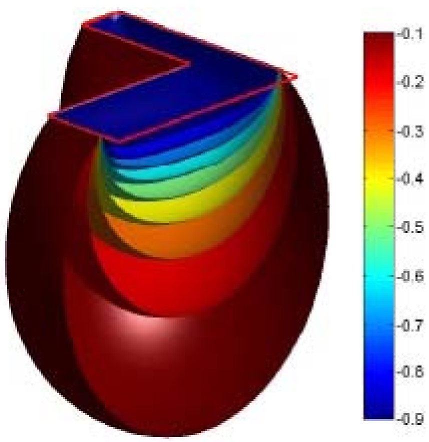
- Data l'area di carico di forma a L:



- e il carico distribuito variabile con legge lineare: $q_l = 0,5\ x + y$

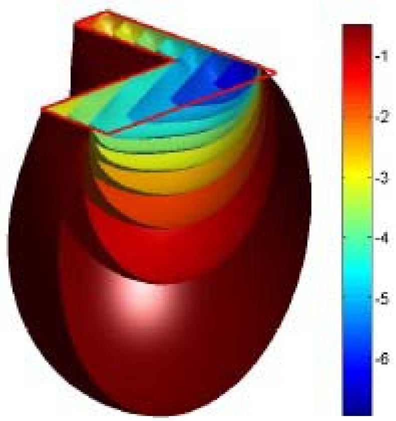


- Di seguito si riportano i diagrammi delle tensioni relative al caso in questione:



Carico costante

$q_k = 1$



Carico variabile con legge lineare

$q_l = 0.5x + y$

Grazie per l'attenzione.