UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
FEDERICO II

FACOLTÀ DI
INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE
INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO

TESI DI LAUREA

VALUTAZIONE DEL CARICO CRITICO PER TRAVI A SEZIONE FORTEMENTE VARIABILE

Relatore
CH.MO PROF. ING. MARIO PASQUINO

Candidata
IDA MASCOLO
MATR. 518/745

Il presente lavoro di tesi ha per obiettivo lo studio dell'instabilità elastica allorquando si abbia a che fare con sezioni a forte variabilità, ovvero con inerzia variabile linearmente sia lungo lo sviluppo longitudinale che lungo quello trasversale della trave. In particolare si è fatto riferimento ad una tipica trave euleriana, ovvero appoggiata appoggiata suddivisa in tre tratti a differente variabilità. Lo schema statico di riferimento è quello proposto in figura:

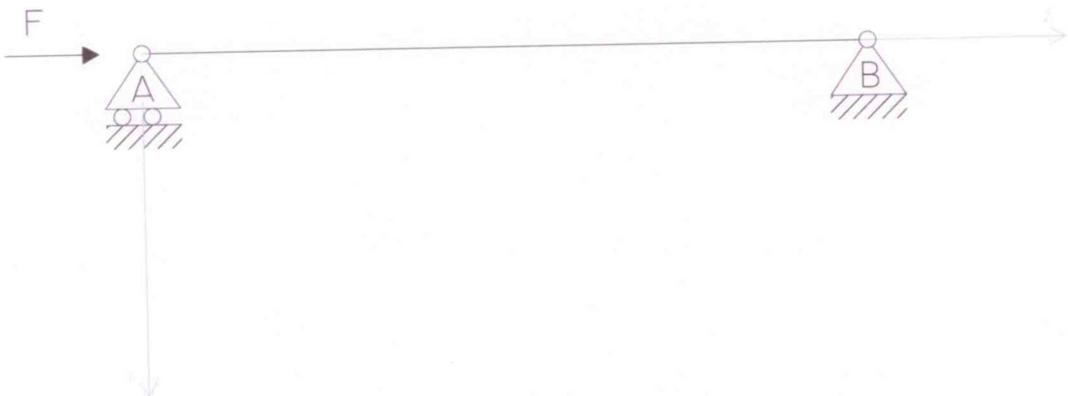

Fig.1

Si parla di instabilità elastica, allorquando, prima ancora che il materiale costituente abbia superato la sua fase elastico-lineare, e quindi per valori di sforzo ovunque al di sotto della capacità resistiva del materiale, al crescere progressivo delle azioni che cimentano la struttura, questa perviene al collasso o ad un'eccessiva deformazione con perdita di funzionalità senza che comunque se ne sia compromesso in alcun modo il materiale.

Esistono differenti tipi di instabilità a seconda della forzante che innesca il meccanismo di risonanza della struttura. Quella di cui ci occuperemo in questo lavoro è l'instabilità per branching ovvero per diramazione, tipica di membratura compresse caratterizzate da valori di snellezza molto elevati[1].

[1] *Per snellezza si intende il rapporto tra lunghezza libera di inflessione e raggio di inerzia minimo della sezione trasversale. Nelle strutture metalliche la snellezza non deve superare il valore 200 per le membrature principali e 250 per quelle secondarie. In presenza di azioni dinamiche rilevanti i suddetti valori vanno limitati rispettivamente a 150 e 200. Nelle strutture in calcestruzzo armato, vengono ritenuti snelli i pilastri con snellezza maggiore di 35.*

Un esempio classico si ottiene premendo con forza crescente una stecca da ombrello: quando la pressione esercitata attinge un particolare valore, detto critico, la configurazione rettilinea dell'asta cessa di essere l'unica possibile e la stecca improvvisamente si inflette.
L'inflessione avviene in un piano principale di inerzia e, a meno di impedimenti, nel piano principale di minore resistenza flessionale[2].

È bene osservare che la necessità di considerare più condizioni di equilibrio sotto le stesse forze comporta l'abrogazione del principio di Kirchhoff, e quindi la rimozione, negli studi sulla stabilità, di una o tutte le ipotesi su cui si regge tale principio. In genere si rinunzia all'ipotesi di piccolezza degli spostamenti o, nel senso più ampio, non considerando più le derivate prime delle componenti dello spostamento u, v, w trascurabili rispetto all'unità o, nel senso più stretto, non definendo più gli stati tensionali, ovvero le caratteristiche interne della sollecitazione, con riferimento alla struttura in deformata, ma alla configurazione di equilibrio.

Si badi bene che grandi spostamenti non significa grandi deformazioni; infatti è possibile avere in tutta la struttura delle componenti di deformazione piccole, comunque contenute nell'ambito elastico, associate a spostamenti vistosi; ciò non è in contraddizione con l'enunciato dell'ipotesi di piccoli spostamenti, perché derivate prime di u, v, w sono in tal caso grandi rispetto ad un riferimento fisso nello spazio, piccole rispetto ad un riferimento variabile ed avente origine nell'intorno cui le componenti sono relative. Ciò equivale a dire che sono grandi le componenti della traslazione rigida e della rotazione rigida dell'intorno, mentre si mantengono piccole le componenti della deformazione pura. Del resto, è proprio la presenza di spostamenti notevoli, condizione che si accompagna in genere alla presenza di più configurazioni di equilibrio, che impone di star lontani da tali situazioni; infatti spesso si dà il caso, nelle strutture sottili di cambiamenti di configurazione radicali pur restando in campo perfettamente elastico, senza quindi alcuna compromissione del materiale, ma con

---

[2] *ovvero nel piano ortogonale all'asse di minimo momento di inerzia.*

perdita completa di funzionalità.

Stante la variabilità della sezione la teoria Euleriana sulla quale si basano, in genere, gli studi sull'instabilità perde di efficacia e si rendono indispensabili approcci teorici differenti. L'approccio utilizzato nel presente lavoro di tesi è quello energetico. Esso prende le mosse dall'osservazione secondo cui quando un corpo si sposta dalla sua condizione di equilibrio, si verifica una variazione dell'energia di deformazione elastica ed una variazione dell'energia potenziale di posizione delle forze esterne.

L'equilibrio risulta *stabile*, *instabile* o *indifferente* a seconda che l'energia totale sia aumentata, diminuita o rimasta invariata.
Infatti, se il sistema corpo deformato e forze esterne viene spostato di poco dalla configurazione di equilibrio e nella nuova configurazione possiede un'energia maggiore, esso tende a liberarsi di questa energia in eccesso tornando alla posizione iniziale, in cui l'equilibrio sarà di tipo stabile; se, invece, il sistema suddetto possiede nella nuova configurazione un'energia minore rispetto alla situazione indeformata, esso tenderà ad allontanarsene ulteriormente, e tale posizione sarà pertanto di tipo instabile.

Per bassi valori delle forze esterne, la diminuzione della loro energia di posizione non basta a compensare l'aumento di energia interna, dovuta alla deformazione imposta, per cui l'equilibrio risulterà stabile; invece, per valori più elevati delle forze esterne la diminuzione della loro energia potenziale è più che sufficiente a compensare l'aumento dell'energia di deformazione, per cui l'energia totale del sistema diminuirà e quindi vi sarà un *surplus* di energia liberata che può servire a deformare ulteriormente il corpo, allontanandolo così dall'equilibrio che, pertanto, risulterà instabile.

La condizione di stabilità dell'equilibrio viene dettata, sulla scorta delle precedenti osservazioni, dal principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, dimostrato da Lagrange e reso più rigoroso da Dirichlet. Esso può enunciarsi nel seguente modo:

"condizione necessaria e sufficiente perché una configurazione C di una struttura elastica, soggetta a forze e distorsioni note, sia di equilibrio, è che l'energia potenziale totale in corrispondenza della configurazione C sia stazionaria rispetto a qualsiasi variazione congruente della configurazione stessa"

e vale nelle ipotesi poco restrittive di materiale elastico e vincoli lisci e bilaterali.
Formalmente esso si traduce in un sistema di n equazioni, condizioni necessarie e sufficienti di equilibrio, del tipo:

$$\frac{\partial_{(1)} E_t}{\partial c_i} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

ove n è il numero di parametri lagrangiani dal quale si decide di far dipendere le componenti dello spostamento u, v, w.
È bene precisare che le variazioni di configurazione ∂C devono sottostare ai soli limiti imposti dalla congruenza e non a quelli di equilibrio e che devono comunque essere prossime alla configurazione di partenza.
Assimilata la struttura da analizzare ad un sistema olonomo a n gradi di libertà si tratta, dunque, di scegliere come fittizia un variazione di configurazione congruente e come reale il sistema forze agente sulla struttura, e di applicare ad esso la condizione di stazionarietà. Per quanto concerne l'energia potenziale totale essa può essere espressa come la somma dell'energia potenziale delle forze esterne e l'energia di deformazione connessa alla struttura, purché le forze che la cimentano siano conservative.
A loro volta l'energia potenziale P delle forze esterne e quella di deformazione L possono esprimersi, nell'ulteriore ipotesi di piccoli spostamenti[3], rispettivamente, come:

[3] *Si ricorda che nei problemi di instabilità è vero che si possono avere grandi spostamenti ma solo rispetto ad un sistema di riferimento fisso nello spazio; infatti, essi risultano comunque piccoli rispetto ad un sistema di riferimento variabile nell'intorno del punto considerato.*

$$P = -F \cdot w_A \qquad con \qquad w_A = \frac{1}{2}\int_0^l v'^2 dz$$

$$L = \int_0^l \frac{M^2}{2 \cdot EI(z)} dz = \frac{1}{2}\int_0^l EI(z) \cdot v''^2 dz = \frac{E}{2}\int_0^l I(z) \cdot v''^2 dz$$

Come configurazione congruente si può, dunque, scegliere una qualsiasi funzione che rispetti la congruenza imposta dai vincoli. Una nota proposizione, infatti, assicura che i valori di carico critico ottenuti utilizzando tipi di deformata diversi dal vero sono sempre maggiori del carico critico reale ma comunque poco discosti da esso. Tale affermazione trova precisa dimostrazione matematica ma si giustifica sul piano fisico con la considerazione che operare su una deformata diversa dalla vera equivale all'introduzione di vincoli supplementari, e ciò innalza il valore del carico critico. Dal punto di vista pratico l'osservazione è preziosa, poiché pone ovvi limiti ai procedimenti energetici illustrati.

In fede a quanto descritto si è scelto, dunque, di sviluppare il problema in esame secondo due approcci: l'uno vede l'approssimazione della deformata con lo sviluppo in serie di Fourier

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot sen\frac{n \cdot \pi \cdot z}{l}$$

e l'altro con una più realistica funzione algebrica di grado n-simo:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot z^{i-1}$$

In particolare, si evince immediatamente che ogni funzione del tipo $sen\frac{n \cdot \pi \cdot z}{l}$ rispetta, comunque si scelga n, le condizioni di congruenza:

$$z = 0 \quad v = 0$$
$$z = l \quad v = 0$$

e quelle di equilibrio:

$$\begin{array}{ll} z=0 & v''=0 \\ z=l & v''=0 \end{array}.$$

Il rispetto delle condizioni di equilibrio, di fatto, rappresenta una ridondanza, dal momento che il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale **E** assicura già la stazionarietà dell'equilibrio, con riferimento a tutte le possibili configurazioni congruenti[4].

Per quanto riguarda, invece, le funzioni algebriche $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot z^{i-1}$ esse rispettano le condizioni di congruenza solo per taluni valori dei coefficienti c_i, che assumono valore di parametri lagrangiani.

Operando con successive approssimazioni si ottiene in definitiva che il carico critico offerto dallo sviluppo in serie di Fourier, per la specifica trave in esame è pari a circa 173.9 kN quello offerto dalla funzione algebrica è, invece, pari a 404.6 kN.

Si è ritenuto necessario, a questo punto, un confronto dei risultati ottenuti con quelli derivanti da un'analisi di tipo buckling a mezzo SAP 2000. Quest'ultima porge un valore di carico critico pari a 401.0 kN.

Osservando che, comunque, il valore di carico critico da noi ricercato è compreso tra i valori ottenuti dalla formula di Eulero imponendo prima un'inerzia costante pari a quella minima della trave in esame e poi pari a quella massima:

$$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2} \leq \mathrm{F_{cr}} \leq \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\max}}{l^2}$$

ovvero nell'intervallo:

---

[4] *Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale asserisce che per un sistema conservativo, la configurazione di equilibrio è l'unica che rende stazionaria l'energia potenziale totale fra tutte le configurazioni congruenti.*

$$36kN \leq F_{cr} \leq 548kN$$

si osserva che i valori di carico critico da noi ottenuti con entrambe le approssimazioni sono contenuti in tale intervallo, risultando, dunque, realistici. In particolare il valore ottenuto approssimando la deformata con una funzione più vicina alla deformata reale, ovvero quella algebrica, risulta più vicino al valore ottenuto a mezzo SAP ed in particolare tale convergenza migliora sempre più all'aumentare del grado n della funzione considerata, coerentemente a quanto ci si aspettava.

Dal punto di vista degli spostamenti si evince, invece, una maggior convergenza ai valori ottenuti a mezzo SAP, da parte dei risultati offerti approssimando la deformata con lo sviluppo in serie di Fourier. Gli spostamenti ottenuti, invece, approssimando la deformata con una funzione algebrica risultano non solo lontani da quelli ottenuti a mezzo SAP, ma addirittura fisicamente impossibili, ovvero dello stesso ordine di grandezza della lunghezza della trave. Di fatto, non è pensabile che essi si realizzino senza plasticizzazioni o violazioni della congruenza interna del materiale.

Quest'ultimo risultato, rende il secondo approccio poco affidabile, ma non sorprende. Infatti, nonostante risulta abbastanza agevole trovare il polinomio caratteristico della matrice differenziale ottenuta imponendo la stazionarietà dell'energia potenziale, la determinazione dei coefficienti di tale polinomio, ovvero delle coordinate lagrangiane, è sempre un'operazione molto delicata perché anche un piccolo errore di arrotondamento può portare ad un errore molto grande. Di fatto è noto, già a priori, che il valore di carico critico che si ottiene a mezzo dei procedimenti energetici è maggiore di quello reale sebbene poco discosto da esso, per cui il problema del condizionamento della matrice diviene di fondamentale importanza. È chiaro, dunque, che l'utilizzo di funzioni algebriche di ordine n rispetto all'utilizzo di funzioni trigonometriche porge una minore stabilità nel problema del condizionamento matriciale.

A conclusione di quanto detto si riportano i diagrammi delle deformate ottenute con le diverse approssimazioni fatte e a mezzo SAP.

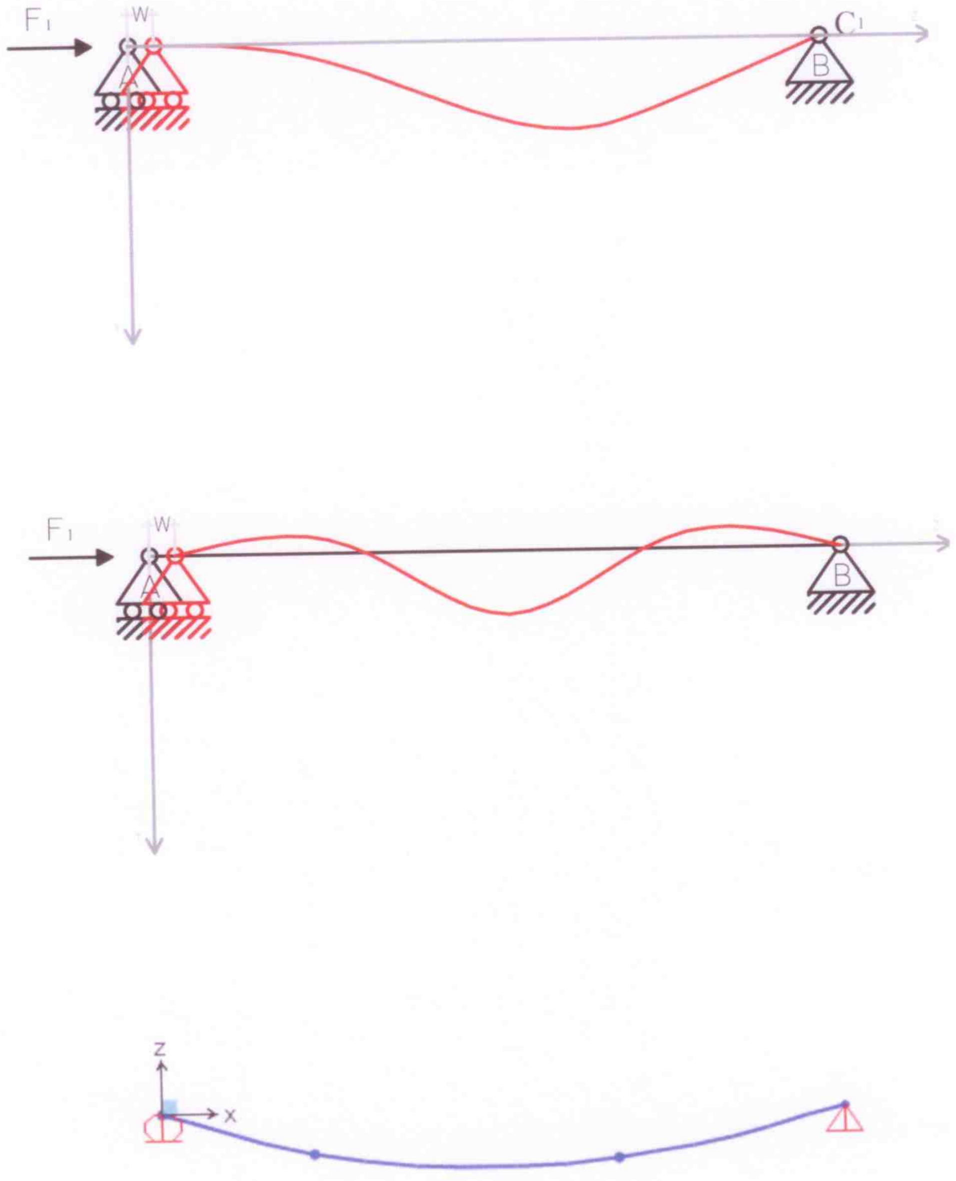

Fig.2

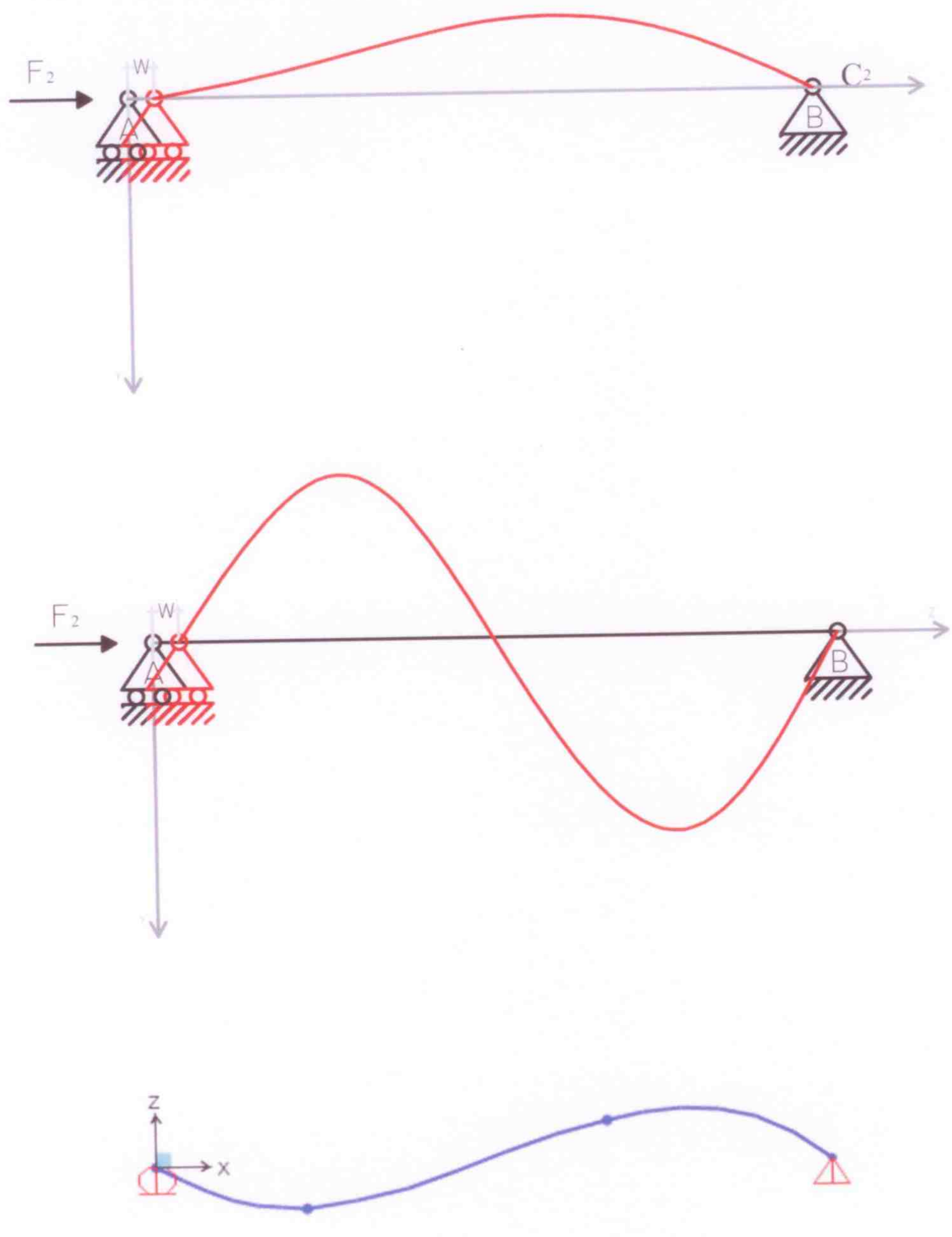

Fig.3

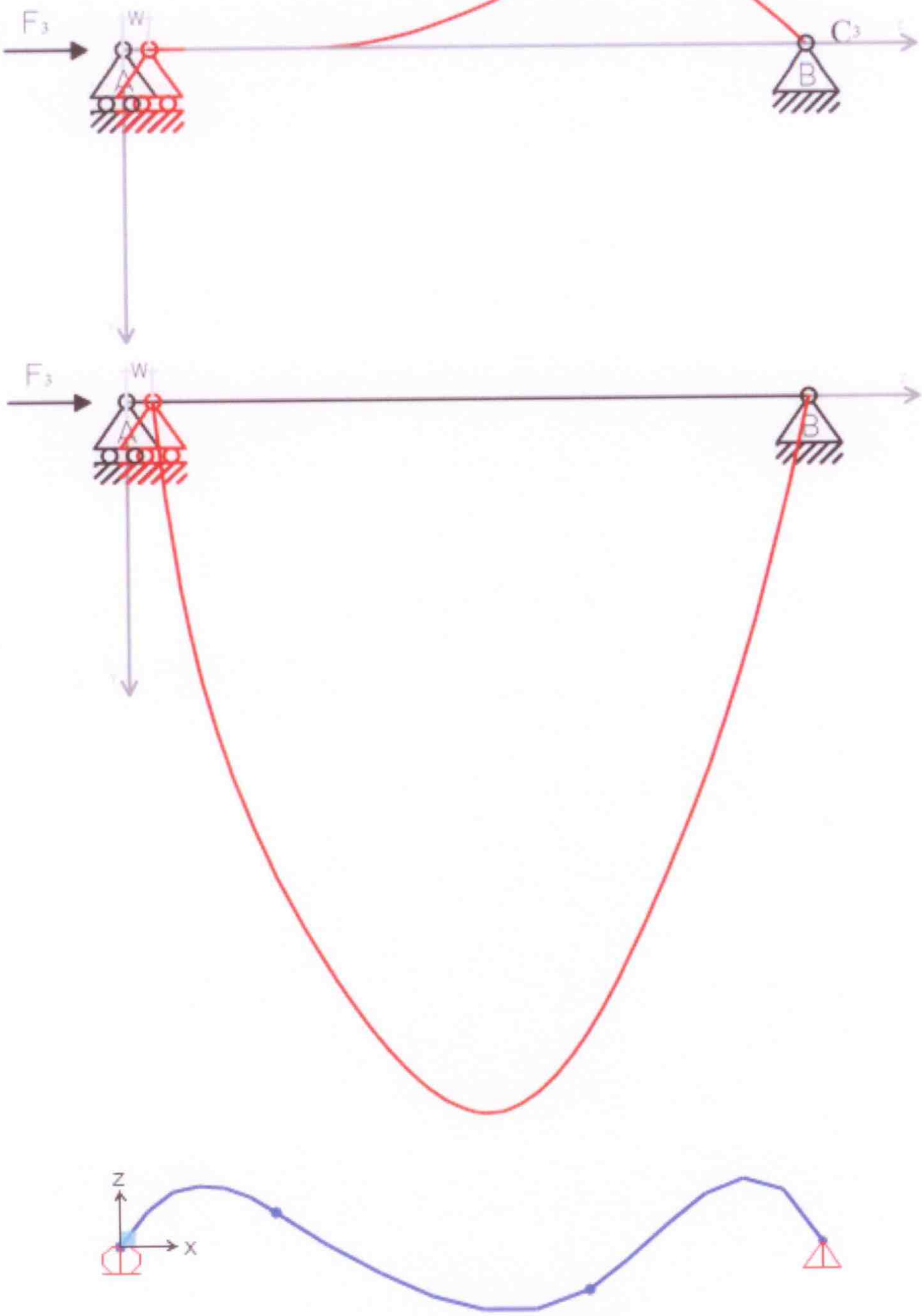

Fig.4