



Università degli Studi di Napoli Federico II

Corso di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

VERIFICA ALLO STATO LIMITE ULTIMO PER TENSIONI NORMALI DI SEZIONI IN C.A. CIRCOLARI CAVE

Relatore:

Prof. Ing. Gerardo M. Verderame

Correlatore:

Ing. Paolo Ricci

Candidato:

Samuele Saccoccio

Matr. N49/27

Anno Accademico 2013/2014

Introduzione

- Gli elementi in calcestruzzo armato con sezione circolare sono ampiamente usati nell'Ingegneria Strutturale e Geotecnica per la loro semplicità di costruzione e per le caratteristiche di resistenza, sotto vento e carico sismico, uguali in ogni direzione.
- Nel presente lavoro di tesi è stato affrontato lo studio di un metodo semplificato per la valutazione della resistenza allo Stato Limite Ultimo per tensioni normali di sezioni in c.a. circolari cave. Lo studio è stato affrontato tramite tre metodi: Metodo a fibre, Metodo di Cosenza et al. e il Metodo proposto.
- Prima di entrare nel merito dell'elaborato è utile fare una premessa sullo Stato Limite Ultimo.
- Con il termine sicurezza strutturale si vuole intendere il grado di protezione di persone e beni rispetto alle conseguenze del collasso strutturale, non necessariamente distruzione dell'opera, bensì il raggiungimento di una qualunque condizione di Stato Limite che determini il malfunzionamento del sistema strutturale o di una sua parte e che, quindi, possa potenzialmente determinare delle perdite. Tale concetto di sicurezza strutturale viene sempre fatto dipendere dal periodo di funzionamento dell'opera o più precisamente dalla vita della costruzione.
- Nella definizione di Stato Limite si distinguono:
 - Stato Limite Ultimo (SLU);
 - Stato Limite di Esercizio (SLE).

Stato Limite Ultimo

- Gli Stati Limite Ultimi (SLU) sono stati associati al valore estremo della capacità portante o ad altre forme di cedimento strutturale che possono mettere in pericolo la sicurezza delle persone. Tali condizioni hanno carattere irreversibile. Alcuni esempi delle cause che possono condurre agli SLU sono:
 - perdita di stabilità di parte o dell'insieme della struttura;
 - rottura di sezioni critiche della struttura;
 - trasformazione della struttura in un meccanismo;
 - instabilità in seguito a spostamenti o deformazioni eccessive;
 - deterioramento in seguito a fatica;
 - deformazioni di fluage o fessurazioni, con conseguente cambiamento della geometria della struttura, tale da richiederne la sostituzione.
- Le ipotesi di calcolo fondamentali nello studio dello SLU per tensioni normali sono:
 - conservazione delle sezioni piane;
 - perfetta aderenza tra cls e acciaio;
 - cls non reagente a trazione;
 - crisi lato calcestruzzo;
- Si rendono inoltre necessarie delle considerazioni sui materiali che compongono l'elemento in c.a. .

Legame costitutivo del calcestruzzo

Legame parabola-rettangolo

- $\varepsilon_{c2} = 0,002$

- $\varepsilon_{cu} = 0,0035$

- $f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$

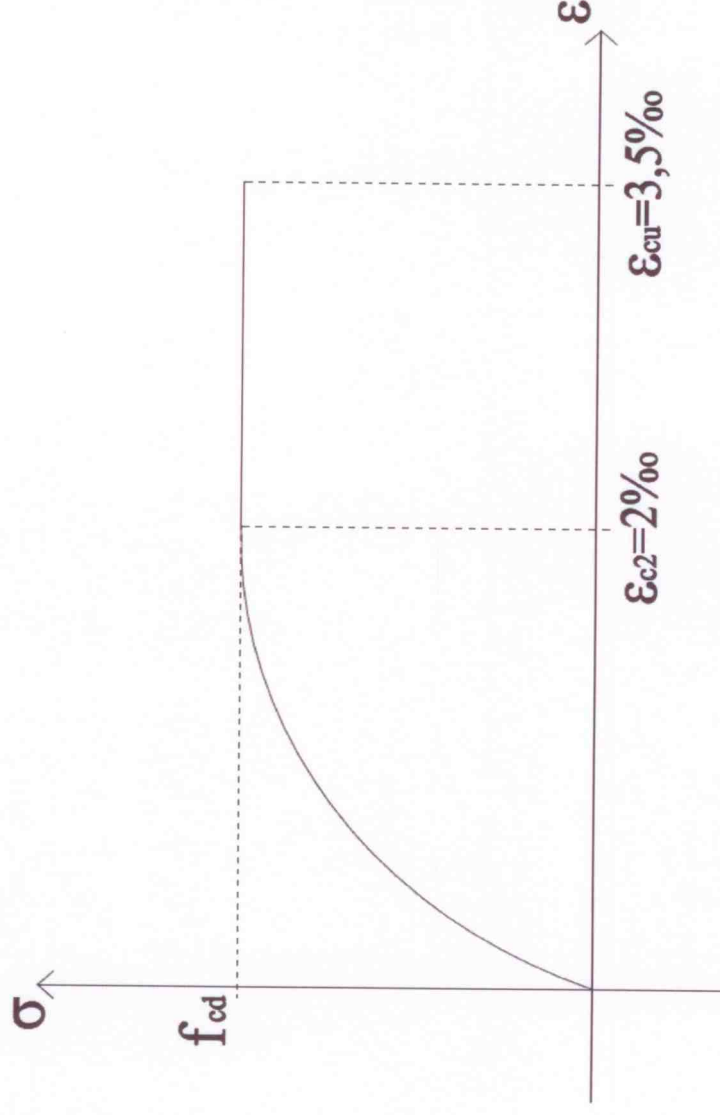
- f_{cd} : resistenza di progetto;

- $\alpha_{cc} = 0,85$ è il coefficiente per le resistenze di lunga durata;

- f_{ck} è la resistenza a compressione caratteristica;

- $\gamma_c = 1,5$ è il coefficiente parziale di sicurezza del calcestruzzo.

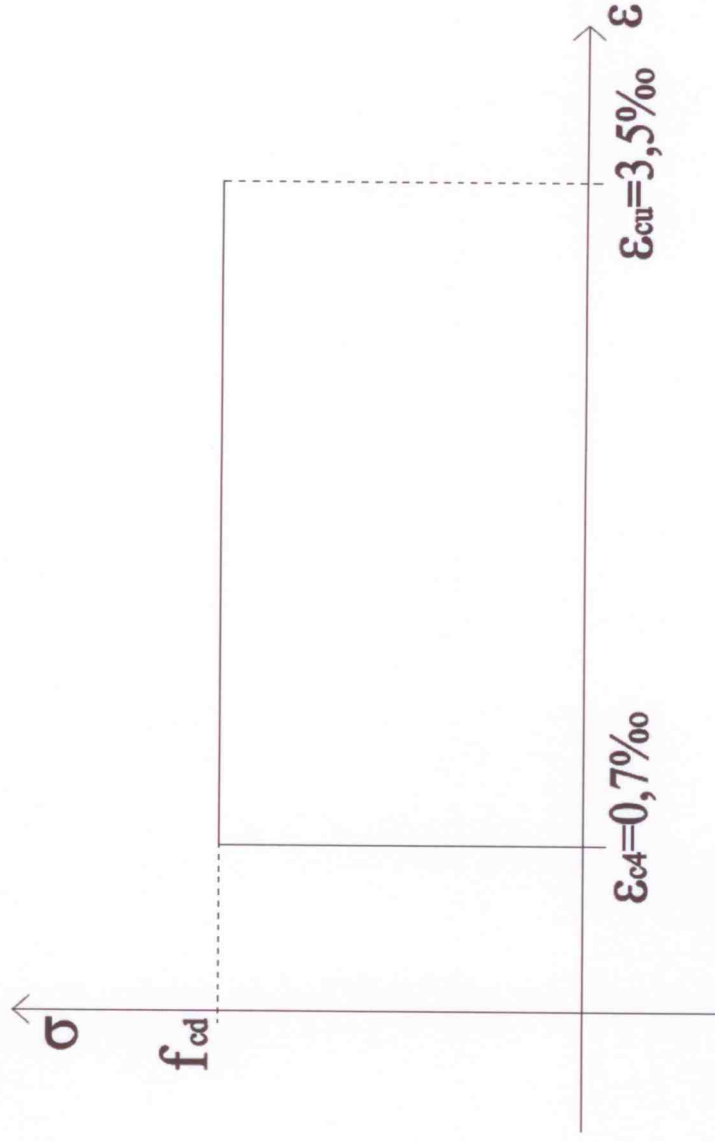
- $f_{ck} = 0,83R_{ck}$



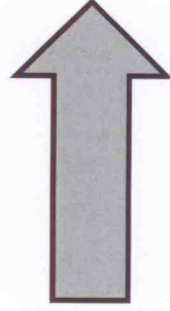
- $A(\sigma-\varepsilon) \cong 0,8094f_{cd}\varepsilon_{cu}$ $d(\sigma-\varepsilon) \cong 0,584\varepsilon_{cu}$

Legame costitutivo del calcestruzzo

Legame rigido-plastico (stress block)



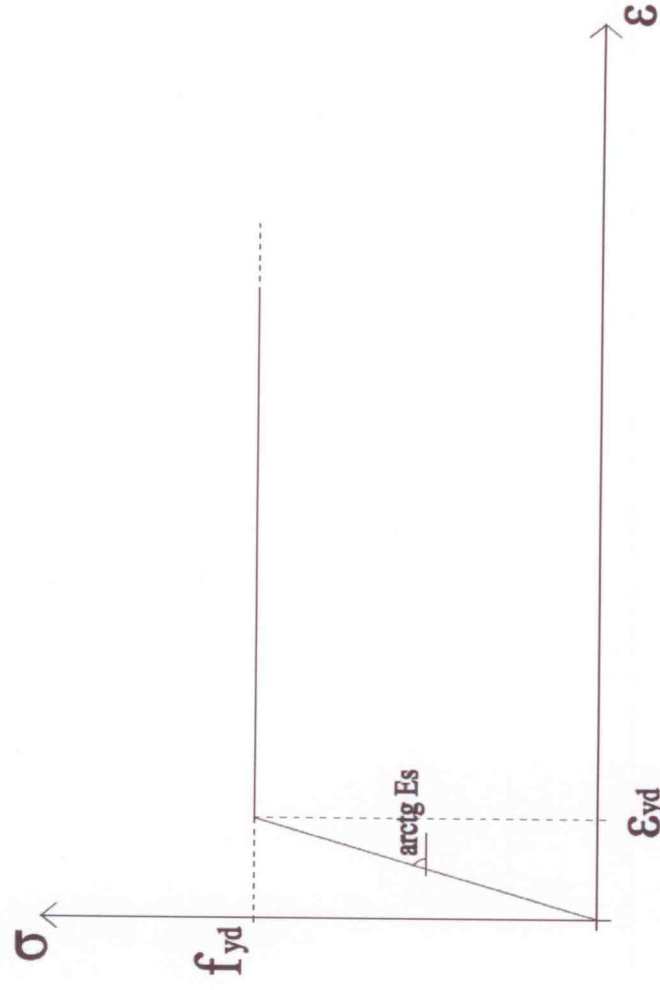
- $\epsilon_{c4} = 0,2\epsilon_{cu}$
 - $\epsilon_{cu} = 0,0035$
 - $A(\sigma-\epsilon) = 0,8f_{cd}\epsilon_{cu}$
 - $d(\sigma-\epsilon) = 0,6\epsilon_{cu}$
- Se si utilizza cls C25/30
- $f_{cd} = 14,17 \text{ MPa}$



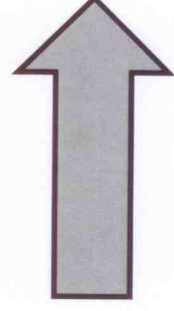
Legame costitutivo dell'acciaio

Legame elasto-plastico

- $E_s = 210000 \text{ MPa}$
- $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$
 - f_{yd} : tensione di snervamento di progetto;
 - f_{yk} : tensione di snervamento caratteristica;
 - $\gamma_s = 1,15$ è il coefficiente parziale di sicurezza dell'acciaio.



- $\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$
- Se si utilizza acciaio B450C



- $f_{yd} = 391,3 \text{ MPa}$
- $\epsilon_{yd} = 0,00186$

Analisi di sezioni in c.a. circolari cave

Metodo a fibre

- L'analisi è stata eseguita considerando i contributi dell'intera sezione, come se fosse una sezione circolare piena, sottraendo successivamente i contributi "dell'area di vuoto". L'analisi è stata sviluppata secondo i seguenti step:

- Discretizzazione della sezione circolare di solo cls e determinazione di relativo sforzo e momento, imponendo la curvatura:

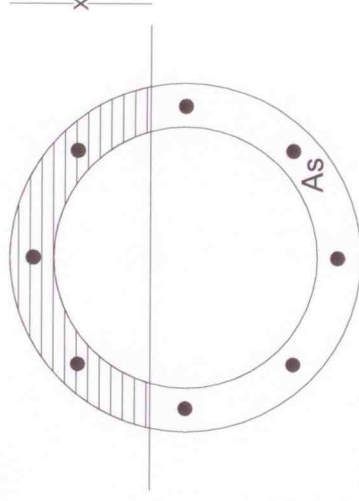
$$\chi = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \rightarrow x = \frac{\varepsilon_{cu}}{\chi}$$

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{cu} + \chi * R$$

$$\varepsilon_{c,i} = \varepsilon_g + \chi * d_{g,i}$$

$$A_{i (cls)} = 2 * L_i * dy$$

- Per il cls si utilizza il legame costitutivo parabola-rettangolo.



$$\sigma_{c,i} = \frac{F_{c,i}}{A_{i (cls)}} \rightarrow F_{c,i} = \sigma_{c,i} * A_{i (cls)}$$

$$M = F * b \rightarrow F_{c,i} * d_{g,i}$$

In definitiva sommando il contributo di ogniesima fibra:

$$N_c = \sum_{i=1}^n F_{c,i}$$

$$M_c = \sum_{i=1}^n F_{c,i} * d_{g,i}$$

Analisi di sezioni in c.a. circolari cave

Metodo a fibre

- Definizione delle fibre relative alle barre di armatura e determinazione di relativo sforzo e momento, imponendo un valore di tentativo della curvatura.

$$\chi = \frac{\epsilon_{cu}}{\chi} \rightarrow \chi = \frac{\epsilon_{cu}}{\chi}$$

$$\epsilon_g = \epsilon_{cu} + \chi * R$$

$$\epsilon_{s,i} = \epsilon_g + \chi * d_{g,i}$$

$$A_{i(\text{acciaio})} = \frac{\pi * \phi^2}{4}$$

- Per l'acciaio si utilizza il legame costitutivo elasto-plastico.

$$\sigma_{s,i} = \frac{F_{s,i}}{A_{i(\text{acciaio})}} \rightarrow F_{s,i} = \sigma_{s,i} * A_{i(\text{acciaio})}$$

$$M = F * b \rightarrow F_{s,i} * d_{g,i}$$

In definitiva sommando il contributo di ogni i-sima fibra:

$$N_s = \sum_{i=1}^n F_{s,i}$$

$$M_s = \sum_{i=1}^n F_{s,i} * d_{g,i}$$

- La somma dei contributi di sforzo e momento del cls e dell'acciaio fornisce i valori per la sezione cava, sottraendo al contributo dell'intera sezione circolare quello "dell'area di vuoto":

$$N = (N_{c \text{ sezione circolare}} - N_{c \text{ area vuota}}) + N_s$$

$$M = (M_{c \text{ sezione circolare}} - M_{c \text{ area vuota}}) + M_s$$

- Si impone v e ρ :

$$v = \frac{N_{sd}}{f_{cd} * A_{sezione \text{ cls}}} \rightarrow N_{sd} = v * f_{cd} * A_{sezione \text{ cls}}$$

L'area di cls ottenuta sfruttando la relazione per sezione circolare cava:

Analisi di sezioni in c.a. circolari cave

Metodo a fibre

$$A_{\text{sezione cls}} = \pi * (R_e^2 - r_i^2)$$

$$\rho = \frac{A_{\text{sezione cls}}}{A_{\text{sezions barre}}} \rightarrow A_{\text{sezions barre}} = \rho * A_{\text{sezione cls}}$$

$$A_{\text{sezions barre}} = \frac{\pi * \phi^2}{4} * n_b^o \rightarrow \phi = \sqrt{\frac{4 * A_{\text{sezions barre}}}{n_b^o * \pi}}$$

• Si parte da un valore di tentativo della curvatura, quindi il valore di curvatura che annulla lo scarto tra sforzo attuale e sforzo imposto, ricavato attraverso una procedura numerica iterativa, sarà quello in funzione del quale si valuterà il momento resistente:

$$S_{\text{scarto}} = N - N_{sd}$$

Analisi di sezioni in c.a. circolari cave

Metodo di Cosenza et al.

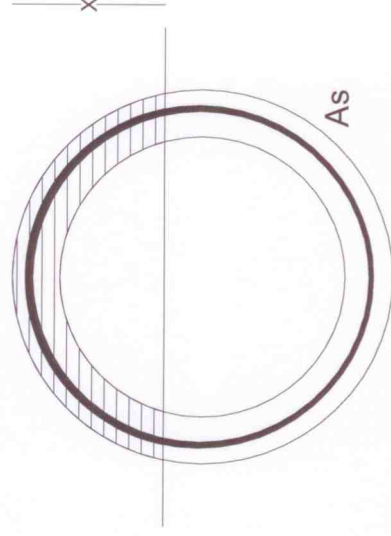
- In questo metodo le barre longitudinali vengono sostituite con un anello sottile di area equivalente alle stesse. Inoltre la resistenza del cls risulta:

$$f'_{cd} = 0,9 * f_{cd}$$

- L'analisi sulla sezione di cls è stata condotta alla stessa maniera del Metodo a fibre. Ai "contributi" dell'intera sezione circolare sono stati sottratti i contributi dell'area circolare interna, ovvero dell'"area di vuoto". Gli step adottati sono gli stessi:

- Discretizzazione della sezione circolare di solo cls e determinazione di relativo sforzo e momento, imponendo la curvatura:

$$\chi = \frac{\epsilon_{cu}}{x} \rightarrow x = \frac{\epsilon_{cu}}{\chi}$$



- In questo caso per il cls il legame costitutivo adottato è il legame stress-block.

Come già visto si giunge:

$$N_c = \sum_{i=1}^n F_{c,i} \quad M_c = \sum_{i=1}^n F_{c,i} * d_{g,i}$$

- L'analisi sulla sezione di acciaio risulta diversa dal metodo precedente, non si sfrutta più la suddivisione in spicchi ma in porzione di sezione, funzione dell'angolo ϑ .

Analisi di sezioni in c.a. circolari cave

Metodo di Cosenza et al.

- Si impone un valore di tentativo di curvatura:

$$x = \frac{\varepsilon_{cu}}{\chi} - c$$

Per la porzione compressa:

$$\vartheta_c = 2 * \cos^{-1} \frac{R' - x}{R'}$$

$$A_{i(c)}(\text{acciaio}) = A_s(\text{anallo}) * \frac{\vartheta}{2 * \pi}$$

$$d_{g,i(c)} = \frac{2 * R' * \sin \frac{\vartheta}{2}}{\vartheta}$$

Per la porzione tesa:

$$\vartheta_t = (2 * \pi) - \vartheta_c$$

$$A_{i(t)}(\text{acciaio}) = A_s(\text{anallo}) - A_{i(c)}(\text{acciaio})$$

$$d_{g,i(t)} = -d_{g,i,c} * \frac{A_{i,c}(\text{acciaio})}{A_{i,t}(\text{acciaio})}$$

In questo metodo vale poi l'ipotesi di acciaio sempre snervato:

$$\varepsilon_{s,i} = \varepsilon_{yd} = 0,00186$$

$$\sigma_{s,i} = f_{yd} = 391,3 \text{ MPa}$$

La somma dei contributi di sforzo e momento del cls e dell'acciaio fornisce i valori per la sezione cava, sottraendo al contributo dell'intera sezione circolare quello "dell'area di vuoto":

Analisi di sezioni in c.a. circolari cave

Metodo di Cosenza et al.

$$N = (N_{c \text{ sezione circolare}} - N_{c \text{ area vuota}}) + N_s$$

$$M = (M_{c \text{ sezione circolare}} - M_{c \text{ area vuota}}) + M_s$$

• Come precedentemente fatto si impongono v e ρ e si ottiene per via iterativa il valore di curvatura che annulla lo scarto tra sforzo assiale “attuale” e sforzo assiale imposto:

$$v = \frac{N_{sd}}{f'_{cd} * A_{sezione \text{ cls}}} \rightarrow N_{sd} = v * f'_{cd} * A_{sezione \text{ cls}}$$

$$\rho = \frac{A_{sezione \text{ cls}}}{A_{sezione \text{ barre}}} \rightarrow A_{sezione \text{ barre}} = \rho * A_{sezione \text{ cls}}$$

$$A_{sezione \text{ anello}} = A_{sezione \text{ barre}} = \frac{\pi * \phi^2}{4} * n_c \rightarrow \phi = \sqrt{\frac{4 * A_{sezione \text{ anello}}}{n_b * \pi}}$$

$$Scarto = N - N_{sd}$$

Analisi di sezioni in c.a. circolari cave

Metodo proposto

- Le ipotesi rimangono le stesse del Metodo di Cosenza et al.: sostituzione delle barre con un anello di acciaio sottile di area equivalente e resistenza del cls pari a:

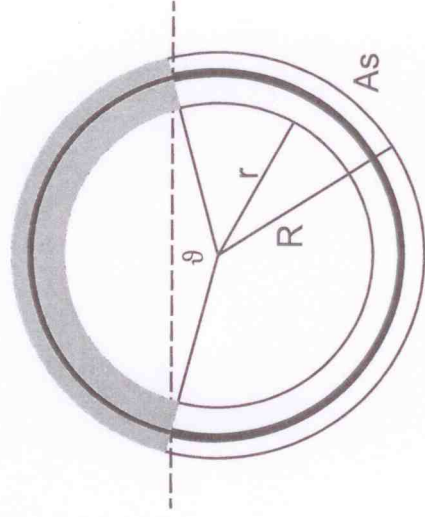
$$f'_{cd} = 0,9 * f_{cd}$$

- In questo metodo non vi è però necessità di eseguire iterazioni numeriche per ottenere il soddisfacimento dell'equilibrio alla traslazione sotto lo sforzo assiale imposto N_{sd} .
- Il metodo si sviluppa nel seguente modo:

$$v = \frac{N_{sd}}{f'_{cd} * A_{sezione\ cls}} \rightarrow N_{sd} = v * f'_{cd} * A_{sezione\ cls}$$

$$\rho = \frac{A_{sezione\ cls}}{A_{sezione\ barra}} \rightarrow A_{sezione\ barra} = \rho * A_{sezione\ cls}$$

$$A_{sezione\ anello} = A_{sezione\ barra} = \frac{\pi * \phi^2}{4} * n_b^0 \rightarrow \phi = \sqrt{\frac{4 * A_{sezione\ anello}}{n_b^0 * \pi}}$$



$$A_{sezione\ cls} = \pi * (R_{\theta}^2 - r_i^2)$$

Analisi di sezioni in c.a. circolari cave

Metodo proposto

Tramite un equilibrio alla traslazione si ricava l'angolo ϑ :

$$N_{sd} = f'_{cd} * A_c + f_{yd} * A_{s,compressa} - f_{yd} * A_{s,tessa}$$



$$N_{sd} = f'_{cd} * \frac{1}{2} * \vartheta * (R_e^2 - r_i^2) + f_{yd} * A_s * \left(\frac{\vartheta}{2\pi} - \frac{2\pi - \vartheta}{2\pi} \right)$$

$$\vartheta = \frac{N_{sd} + f_{yd} * A_s}{f'_{cd} * \frac{1}{2} * \vartheta * (R_e^2 - r_i^2) + f_{yd} * \frac{A_s}{\pi}}$$

Da ϑ si ricava la porzione di area compresa in tale angolo:

$$A_c = \frac{\vartheta}{2} * (R_e^2 - r_i^2)$$

Sfruttando la relazione utilizzata anche nella trattazione del Prof. Cosenza, adattandola al caso in esame, si ricava la posizione dell'asse neutro considerando il raggio come media tra quello esterno e quello interno:

$$\vartheta = \cos^{-1} \frac{R - 0,80 * x}{R} \rightarrow x = R * \frac{1}{\cos \vartheta + 0,80}$$



$$x = \left(\frac{R_e + r_i}{2} \right) * \frac{1}{\cos \vartheta + 0,80}$$

Determinata la distanza dell'area compresa nell'angolo ϑ dal baricentro, sono stati ottenuti, come precedentemente già fatto, sforzo e momento:

$$y_G = \frac{1}{M} \int_{r_i}^{\frac{R_e}{2}} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{R_e}{2}} \rho_0 * r_m^2 * \cos \vartheta \, d\vartheta \, dr = \frac{2 * \rho_0}{3 * M} * (R_e^3 - r_i^3) * \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{4}{3 * \vartheta} * \frac{(R_e^3 - r_i^3)}{(R_e^2 - r_i^2)} * \sin \frac{\vartheta}{2}$$



$$d_{g,cls} = \frac{4}{3 * \vartheta} * \frac{(R_e^3 - r_i^3)}{(R_e^2 - r_i^2)} * \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$\sigma_c = f'_{cd} = 0,9 * f_{cd} = 0,9 * 391 = 12,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A_c} \rightarrow N_c = \sigma_c * A_c$$

$$M = N * b \rightarrow M_c = N_c * d_{g,cls}$$

Analisi di sezioni in c.a. circolari cave

Metodo proposto

Porzione compressa

$$\vartheta_c = \vartheta$$

$$A_{s,c} = A_s (\text{anello}) * \frac{\vartheta}{2 * \pi}$$

$$d_{g,c} = \frac{2 * R' * \sin \frac{\vartheta}{2}}{\vartheta}$$

Porzione tesa

$$\vartheta_t = (2 * \pi) - \vartheta_c$$

$$A_{s,t} = A_s (\text{anello}) - A_{s,c}$$

$$d_{g,t} = -d_{g,i,c} * \frac{A_{i,c} (\text{acciaio})}{A_{i,t} (\text{acciaio})}$$

Per la sezione di acciaio:

Per le ipotesi fatte:

$$\boxed{\varepsilon_s = \varepsilon_{yd} = 0,00186}$$

$$\boxed{\sigma_s = f_{yd} = 391,3 \text{ MPa}}$$

Sfruttando sempre la definizione di tensione e momento, sommando i contributi della parte compressa e tesa:

$$N_s = N_{s,c} + N_{s,t}$$

$$M_s = M_{s,c} + M_{s,t}$$

Per l'intera sezione sarà la somma del contributo di cls e acciaio:

$$\boxed{N = N_c + N_s}$$

$$\boxed{M = M_c + M_s}$$

Analisi dei risultati

• I risultati ottenuti si presentano molto soddisfacenti, infatti, come mostrato nella tabella seguente, i valori ottenuti sono molto simili a quelli di riferimento ottenuti attraverso il Metodo a fibre. Mentre per il primo metodo (Cosenza et al.) ciò rappresenta una riconferma della sua correttezza, per il secondo (Metodo proposto) rappresenta una novità e dimostra la bontà di tale metodo, che si pone quindi come alternativa ai primi due.

• A conferma di ciò nella tabella è riportato lo scarto di errore dei risultati ottenuti con i metodi esposti sulle sezioni circolari cave. Il primo: rapporto tra i valori ottenuti con il Metodo di Cosenza et al. e il Metodo a fibre, il secondo: rapporto tra i valori ottenuti con il Metodo proposto e il Metodo a Fibre.

v	P	Sezione circolare cava		
		Metodo a fibre	Metodo Cosenza et al.	Metodo proposto
0	1%	246,50	250,10	250,35
	2%	461,20	458,42	459,46
	3%	640,10	656,61	654,27
	4%	816,96	838,60	843,07
0,1	1%	285,82	284,01	282,01
	2%	476,41	479,98	481,2
	3%	653,96	668,67	670,70
	4%	830,12	856,31	856,25
0,2	1%	312,22	304,18	307,40
	2%	491,19	494,48	498,33
	3%	667,52	679,24	683,58
	4%	843,05	866,50	866,55
0,3	1%	329,01	327,46	325,96
	2%	505,18	509,99	510,70
	3%	677,31	690,57	692,84
	4%	848,61	865,28	873,95
0,4	1%	340,52	332,93	337,28
	2%	511,28	514,51	518,19
	3%	681,74	694,11	698,43
	4%	852,09	873,70	878,42
0,5	1%	337,55	335,40	341,11
	2%	507,10	517,03	520,72
	3%	678,33	696,61	700,33
	4%	850,13	876,23	879,93

Errore	
1,01	1,02
0,99	1,00
1,03	1,02
1,03	1,03
0,99	0,99
1,01	1,01
1,02	1,03
1,03	1,03
0,97	0,98
1,01	1,01
1,02	1,02
1,03	1,03
1,00	0,99
1,01	1,01
1,02	1,02
1,02	1,03
0,98	0,99
1,01	1,01
1,02	1,02
1,03	1,03
0,99	1,01
1,02	1,03
1,03	1,03
1,03	1,04

Conclusioni

- In conclusione nel presente lavoro di tesi si è voluto studiare e valutare la resistenza allo Stato Limite Ultimo per tensioni normali di sezioni in c.a. circolari. Ciò è stato fatto inizialmente con i primi due metodi esposti (Metodo a fibre e Metodo di Cosenza et al.), proponendo poi un ulteriore metodo (Metodo proposto).
- Come visto, nel Metodo a fibre le armature sono costituite da barre longitudinali di acciaio, il calcestruzzo studiato tramite il legame costitutivo parabola-rettangolo, mentre per l'acciaio si è adoperato il legame costitutivo elasto-plastico.
- Nel Metodo di Cosenza et al. le barre sono sostituite da un anello di acciaio sottile di area equivalente alle stesse, il calcestruzzo studiato tramite il legame costitutivo rigido-plastico (o stress-block) e con una resistenza di progetto ridotta, mentre l'acciaio viene assunto sempre snervato.

Conclusioni

- Per entrambi gli approcci il parametro di partenza è stata la curvatura si giunge al soddisfacimento dell'equilibrio alla traslazione mediante un calcolo iterativo e quindi alla valutazione del momento resistente.
- Nel Metodo proposto sono state sfruttate le medesime ipotesi del Metodo di Cosenza et al. ma l'analisi è stata eseguita seguendo una strada differente. A partire dallo sforzo normale, si ricava attraverso una procedura in forma chiusa, senza dover eseguire iterazioni numeriche, il valore di profondità dell'asse neutro che soddisfa l'equilibrio alla traslazione, in funzione del quale si può quindi ricavare il momento resistente.
- I risultati hanno mostrato e riconfermato la correttezza dei primi due metodi affrontati (Metodo a fibre e Metodo di Cosenza et al.) ma permettono anche di poter affermare la bontà dell'approssimazione introdotta del terzo metodo, quello proposto, che si pone quindi come una buona alternativa ai primi due.